

Formen til fri vannoverflate over en strømvirvel

Anta at vann roterer rundt en vertikal rotasjonsakse. Over vannet er det luft som med konstant trykk p_0 . Vi ønsker å finne sammenhengen mellom formen til den frie vannoverflaten og formen til vannets hastighetsfelt. Vi har tatt mange bilder av slike vannoverflater, og det er lett å gjøre flere eksperimenter: Rør rundt vannet i et glass, eller slipp vannet ut av et badekar etter at vannet er rørt litt rundt!

La oss anta at vannets hastighetsfelt er gitt som en potenslov av den radielle avstanden fra rotasjonsaksen

$$\mathbf{v} = Ar^n \mathbf{i}_\theta,$$

hvor vi bruker sylinderkoordinater $\{r, \theta, z\}$ hvor z -aksen peker oppover og er rotasjonsaksen, r er den horisontale avstanden fra z -aksen, og θ er en vinkel i horisontalplanet. Tallet n angir den radielle avhengigheten for hastighetsfeltet. Legg merke til at $n = 1$ tilsvarer rotasjon som fast legeme, og i så fall er konstanten A lik vinkelfarten ω . Regn ut at for $n = -1$ er hastighetsfeltet virvelfritt! Regn også ut at hastighetsfeltet er divergensfritt for alle verdier av n !

Vi skal nå sette dette hastighetsfeltet inn i Eulerlikninga

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Det første leddet på venstre side forsvinner fordi hastighetsfeltet er stasjonært. Det andre leddet gir $-\omega r^{2n-1} \mathbf{i}_r$. Det siste leddet gir $\mathbf{g} = -g \mathbf{k}$. Tilsammen får vi tre likninger for å bestemme vanntrykket

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho A^2 r^{2n-1} \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned}$$

Disse har løsning

$$p = p_1 - \rho g z + \begin{cases} \frac{1}{2n} \rho A^2 r^{2n} & \text{for } n \neq 0 \\ \rho A^2 \ln r & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

hvor p_1 er en vilkårlig konstant.

Den frie vannoverflaten beinner seg der hvor vanntrykket er lik lufttrykket, $p = p_0$, og er derfor

$$z = z_0 + \begin{cases} \frac{A^2 r^{2n}}{2ng} & \text{for } n \neq 0 \\ \frac{A^2}{g} \ln r & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

hvor z_0 avhenger av p_1 .

Legg merke til at for $n > \frac{1}{2}$ krummer vannoverflaten opp, for $n < \frac{1}{2}$ krummer vannoverflaten ned! Ta en titt på bildene vi tok: Hvilken verdi av n det ser ut til at vi har i eksperimentene? Kan det se ut til at n er en funksjon av r , og at vår antakelsen om hastighetsfelt som en potenslov er ugyldig? Når ser det ut til at hastighetsfeltet er virvelfritt?