Forelesning 16/2–2018 ved Karsten Trulsen

Parametrisering av generelle flater

(LH 3.9, M 2.3.2)

Vi skal se for oss en flate S i rommet. Rommet er tredimensjonalt, mens flaten er todimensjonal, derfor forventer vi at vi kan parametrisere flaten med to skalarer v og w. Hvert punkt på flaten vil da være gitt ved en 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(v, w)$ hvor (v, w) befinner seg i et 2D parameterrom.

Vi kan konstruere infinitesimale tangentvektorer til overflaten ved å se på endringen i posisjonsvektor på flaten når kun én av parameterene endrer seg om gangen

$$\Delta \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}(v + \Delta v, w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v$$

$$\Delta \boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{r}(v, w + \Delta w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \Delta w$$

Når vi lar endringene i parameterene bli vilkårlig små, $\Delta v, \Delta w \to 0$, bytter vi om Δ til infinitesimal d og vi har eksakt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\, \mathrm{d}w$$

Nå kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\, \mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Legg merke til at vi kan finne normalvektor og flateelement hver for seg

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right| \mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|}$$

Husk at vi har allerede lært en alternativ måte å finne flatenormalvektoren, nemlig dersom vi kan uttrykke flaten som en ekviskalarflate, ved hjelp av en skalarfunksjon $\beta(x, y, z) =$ konstant, så kan enhetsflatenormalvektoren skrives

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|},$$

men i dette tilfellet har vi ingen oppskrift for å finne $\mathrm{d}\sigma$.

Eksempel: Sirkelskive med radius a i høyde h over xy-planet og med sentrum i z-aksen

La parameterrommet være $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sirkelskiven kan skrives

$$\boldsymbol{r}(r, \theta) = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pm\boldsymbol{k}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{k}$ og $\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Eksempel: Sylinder med radius a fra xy-planet og opp en høyde h med z-aksen som senterakse

La parameterrommet være $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq h$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sylinderen kan skrives

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \pm a(\cos\boldsymbol{i} + \sin\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm(\cos\boldsymbol{i} + \sin\boldsymbol{j})$ og $\mathrm{d}\sigma = a\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

Eksempel: Et terreng med høyde $z = h(x, y)$ over xy-planet

La parameterrommet være xy-planet. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt i terrenget kan skrives

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + h(x, y)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\left(\boldsymbol{k} - \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

og herfra kan vi se at $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Legg merke til at vi kunne ha skrevet terrenget som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, og herfra kunne vi ha funnet flatenormalvektoren, men vi hadde i så fall ikke hatt noen oppskrift for å finne flateelementet $\mathrm{d}\sigma$.

Flateintegral over generelle flater

Eksempel: Arealet av sirkelskiva ovenfor.

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^a r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi a^2$$

Eksempel: Arealet av sylinderen ovenfor.

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^h a\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = 2\pi a h$$

Volumintegral

(M 2.4, se også LH 6.9)

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ over et volum V. Vi tenker oss at volumet er delt opp i infinitesimale volumelementer $\mathrm{d}\tau$.

Vi skal være interessert i å regne ut volumintegraler av typen

$$\int_V \boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau, \qquad \int_V f\,\mathrm{d}\tau, \qquad \text{etc.}$$

over volumet V.

To typiske eksempler på volumintegraler er massen til et legeme med volum V og massetetthet ρ, $\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau$, og tyngden til det samme legemet, $\int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau$, hvor $\boldsymbol{g}$ er tyngdens akselerasjon. Legg merke til at massen til et legeme er en skalar, mens tyngden til et legeme er en vektor.

Eksempel: Volumet av en kasse med sidekanter a, b og c

La kassen være orientert med sidekant a langs x-aksen, sidekant b langs y-aksen, og sidekant c langs z-aksen. La oss betrakte det infinitesimale volumelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, og la oss ta x-integralet først og z-integralet sist:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}\tau = \int_0^c \int_0^b \int_0^a \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^c \int_0^b [x]_{x=0}^a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^c \int_0^b a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ = \int_0^c [ay]_0^b\,\mathrm{d}z = \int_0^c ab\,\mathrm{d}z = [abz]_0^c = abc\end{aligned}$$

Hydrostatisk trykk, trykkraft

(GF 6.6)

Formelen for hydrostatisk trykk skal vi utlede senere, nå bare skriver vi den opp og aksepterer den inntil videre

$$p = p_0 - \rho g z$$

Her er p trykket, p_0 er referansetrykket ved $z = 0$, ρ er den konstante tettheten til mediet, g er tyngdens akselerasjon og z er høyden langs den vertikale aksen. Med minustegnet i denne formelen ser vi at z-aksen er orientert slik at den peker oppover.

Merk: Det er alltid lurt når vi jobber med hydrostatisk trykk å ta "dykkertesten" for å sjekke at vi har fått fortegnene riktig: Vi vet at dersom vi dykker ned på havets bunn så skal trykket øke. Dersom havets bunn befinner seg et sted i negativ z-retning, så kan vi sette inn stadig større negative verdier for z og se at da øker trykket, slik det skal.

Trykkraft på flate S er $\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$.

Oppgave: Vis at tyngden av vannet kan måles ved kraften som virker på bunnen.

Merk: Dette er en overgang fra et volumintegral til et flateintegral.