Forelesning 22/2–2018 ved Karsten Trulsen

Hydrostatisk trykk, trykkraft

(GF 6.6)

Formelen for hydrostatisk trykk skal vi utlede senere, nå bare skriver vi den opp og aksepterer den inntil videre

$$p = p_0 - \rho g z$$

Her er p trykket, p_0 er referansetrykket ved $z = 0$, ρ er den konstante tettheten til mediet, g er tyngdens akselerasjon og z er høyden langs den vertikale aksen. Med minustegnet i denne formelen ser vi at z-aksen er orientert slik at den peker oppover.

Merk: Det er alltid lurt når vi jobber med hydrostatisk trykk å ta "dykkertesten" for å sjekke at vi har fått fortegnene riktig: Vi vet at dersom vi dykker ned på havets bunn så skal trykket øke. Dersom havets bunn befinner seg et sted i negativ z-retning, så kan vi sette inn stadig større negative verdier for z og se at da øker trykket, slik det skal.

Trykkraft på flate S er $\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$.

Oppgave: Mål en mengde vann med en kjøkkenvekt: Vis at tyngden av vannet kan måles ved kraften som virker på bunnen av vektskåla.

Merk: Dette er en overgang fra et volumintegral til et flateintegral.

La vannet i vektskåla ha horisontalt tverrsnitt med areal A og vertikal høyde h. Tyngden til vannet er $\int \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau = \rho A h\boldsymbol{g}$.

Trykket i vannet der det er i kontakt med bunnen vektskåla er $p = p_0 + \rho g h$. Trykkraften som virker fra vannet på vektskåla er $\boldsymbol{F} = \int -\boldsymbol{k}p\,\mathrm{d}\sigma = -(p_0 + \rho g h)A\boldsymbol{k}$. Legg merke til at dersom det ikke hadde vært noe vann i vektskåla så hadde lufttrykket utøvd en trykkraft $\boldsymbol{F}_0 = \int -\boldsymbol{k}p_0\,\mathrm{d}\sigma = -p_0 A\boldsymbol{k}$. Differansen mellom disse to trykkreftene er $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_0 = \int -\boldsymbol{k}p_0\,\mathrm{d}\sigma = -\rho g h A\boldsymbol{k} = \rho A h\boldsymbol{g}$ som er tyngden til vannet!

Divergens

(M 3.3, GF 4.3, LH 6.13)

En enkel definisjon med tanke på å regne ut divergens gis i LH kap. 6.13:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1}$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

Vi ønsker imidlertid en alternativ definisjon av divergens som hjelper oss bedre til å se for seg intuitivt hva divergensen faktisk beskriver. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.3. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan divergens generaliseres til krumlinjede koordinater senere i kurset:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V. Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (2) så følger differensial-uttrykket (1) som en konsekvens.

For å regne dette ut lar vi kontrollvolumet ha en form som det er spesielt enkelt år regne på i kartesiske koordinater: En terning med sentrum i (x_0, y_0, z_0) og med sidekanter $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

1. Flaten er $x = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y \Delta z$.

2. Flaten er $y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x \Delta z$.

3. Flaten er $z = z_0 + \frac{\Delta z}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y$.

4. Flaten er $z = z_0 - \frac{\Delta z}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y$.

5. Flaten er $y = y_0 - \frac{\Delta y}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x \Delta z$.

6. Flaten er $x = x_0 - \frac{\Delta x}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y \Delta z$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6: $v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y \Delta z - v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y \Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z$.

Side 2 og 5: $v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x \Delta z - v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x \Delta z \approx \frac{\partial v_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z$.

Side 3 og 4: $v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y - v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x \Delta y \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta x \Delta y \Delta z$.

Vi har følgelig fluksintegralet

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \approx \nabla \cdot \boldsymbol{v} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Legg merke til at i grensen $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ og $\Delta z \to 0$ så vil alle tilnærmingene bli eksakt, og vi har at definisjonen (2) impliserer (1).

Ekspansjon og kontraksjon
Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} > 0$ sier vi feltet er en ekspansjon, eller har netto utstrømning.
Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} < 0$ sier vi feltet er en kontraksjon, eller har netto innstrømning.
Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ sier vi feltet er inkompressibelt, eller et solenoid-felt, eller er divergensfritt.

Eksempel: Konstant strøm
For $\boldsymbol{v}$ konstant har vi trivielt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Eksempel: Posisjonsvektor
For $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$$

som viser at posisjonsvektor er en ekspansjon.

Eksempel: Rotasjon som fast legeme
For $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ hvor $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$