Forelesning 1/3–2018 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Mulig modell for strømning nær sluket i en vask?
Se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

hvor origo er et singulært punkt.

Vi regner ut at

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Dette strømningsfeltet strømmer i sirkler rundt origo. Likevel har partikler i strømningsfeltet ikke tendens til å rotere rundt seg selv.

Dette strømningsfeltet bør sammenliknes med en karusell!

To viktige spesialtilfeller: Divergensen til en virvling er null, virvlinga til en gradient er null

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right) + \ldots = 0$$

$$\nabla \times \nabla \phi = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \ldots = \boldsymbol{0}$$

Begge disse er lik null på betingelse at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører derivasjonene, se LH setning 2.5.2 hvor kravet som stilles er at de deriverte eksisterer og er kontinuerlige, vi skal anta at dette er oppfylt.

Skalar- og vektorpotensial
Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ sier vi at ϕ er et skalarpotensial (eller bare potensial) til $\boldsymbol{v}$.
Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ sier vi at $\boldsymbol{A}$ er et vektorpotensial til $\boldsymbol{v}$.
De to viktige spesialtilfellene ovenfor viser at:
Dersom feltet kan uttrykkes ved et vektorpotensial, så er det divergensfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dersom feltet kan uttrykkes ved et (skalar)potensial, så er det virvelfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \implies \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

Det kan også vises at implikasjonene går andre vei, det vil si:

Dersom et felt er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, så eksisterer det et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

Dersom et felt er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, så eksisterer det et (skalar)potensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$.

I dette kurset skal vi vise eksistensen av et (skalar)potensial for et virvelfritt felt. Vi skal ikke vise eksistensen av et vektorpotensial for et divergensfritt felt, men vi skal vise at i det spesielle tilfellet at dersom et felt er 2D og divergensfritt så eksisterer et vektorpotensial.

Eksempel: Vis at tyngdekrafta i Newtons gravitasjonslov er virvelfri
Vi har tidligere sett at vi kan skrive tyngdekraft ved hjelp av et tyngdepotensial

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{i}_r = \nabla\left(\frac{GMm}{r}\right) = -\nabla\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

(Husk at fysikere liker å sette minus-tegn foran gradienten til et potensial.)
Siden tyngdekrafta er gradienten til et skalarpotensial så vet vi at den er virvelfri.

Konservativt felt
Vi har tidligere sett at det er tre forskjellige måter å definere konservativt felt, og det kommer an på lærebokforfatteren hvilken som står skrevet. Vi har nå også en fjerde måte å definere konservativt felt (husk fra forelesning 9.februar):

(I) M (s.28): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en <u>vilkårlig</u> lukket kurve γ.

(II) GF (s.98): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) LH (s.202): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial.

(IV) $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

Vi har tidligere vist at $(I) \iff (II) \iff (III)$. Nå har vi i tillegg vist at $(III) \implies (IV)$. Om kort tid skal vi også vise at $(IV) \implies (I)$, men først skal vi utlede Stokes sats.

Strømfunksjon
La oss anta at vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ er divergensfritt og 2D, nemlig

$$\boldsymbol{v} = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

og

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Vi kan da introdusere en såkalt “strømfunksjon” $\psi(x,y)$ med

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Legg merke til at dette er ekvivalent med å introdusere et vektorpotensial $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{k}\psi$ og skrive vektorfeltet som $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (-\boldsymbol{k}\psi) = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{j}$.

Vi kan nå vise at vektorfeltet blir divergensfritt med denne definisjonen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

La oss nå finne strømlinjene. Husk at strømlinjene er kurver som er overalt tangent til vektorfeltet, dette uttrykker vi ved

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{k} \times \nabla\psi) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla\psi \, \mathrm{d}z - \boldsymbol{k}\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Vi legger merke til at $\nabla\psi$ ikke har noen komponent i z-retning. Vi gjenkjenner også $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\psi$ som et fullstendig differensial. Det følger at vi må oppfylle de to kravene $\mathrm{d}z = 0$ og $\mathrm{d}\psi = 0$ som viser at strømlinjene er gitt ved $\psi =$ konstant og $z =$ konstant.

Dersom strømfunksjonen ψ eksisterer så er altså strømlinjene gitt som ekviskalarlinjene $\psi =$ konstant og kan lett plottes på datamaskin ved hjelp av en `contour`-kommando.

Husk at strømfunksjonen ikke alltid eksisterer! I så fall må vi gå tilbake til den opprinnelige likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Strømrør
Et "rør" som har vegger som er strømlinjer.
Fluks gjennom et strømrør …

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$

(Dette dokumentet er ikke ferdigskrevet)