Forelesning 15/3–2018 ved Karsten Trulsen

Fluid- og kontinuumsmekanikk
GF kap. 10.

Som eksempel på anvendelse av vektor feltteori og flervariabel kalkulus, og som illustrasjon av alle de begrepene vi har gjennomgått i kurset så langt, og som introduksjon til et selvstendig fagfelt som til de grader er basert på denne typen matematikk, skal vi her etablere feltlikninger for fluid- og kontinuumsmekanikk. Dog skal vi ganske snart se at det er lett å se for seg tilsvarende anvendelser innen handelsfag og modellering av trafikk langs veier.

Vi kunne også ha hentet eksempler fra elektromagnetisme, men antakelig er det lettere å se for seg hvordan vann og luft beveger på seg enn hvordan elektriske og magnetiske fenomener foregår.

Fluid partikkel
GF kap. 10.1-3.

Ideen om "kontinuum", eller kontinuerlig medium, ble formulert allerede av Aristoteles (384–322 f.Kr.): Noe som kan deles opp i stadig mindre biter som alltid har de samme egenskapene som de opprinnelige større bitene uansett hvor mye vi deler det opp.

"Kontinuumshypotesen" i fluidmekanikk er idealiseringen at vi kan beskrive et fluid som et kontinuum, til tross for at vi vet at fluidet egentlig består av molekyler. Under kontinuumshypotesen antar vi at egenskaper som tetthet, trykk, temperatur og hastighet er veldefinert for "infinitesimale" volumelementer, det vil si volumelementer som er små sammenliknet med den karakteristiske lengden til vår problemstilling samtidig som de er store i forhold til størrelsen av molekylene eller avstanden mellom dem. I så fall kan vi beskrive oppførselen til fluidet ved hjelp av kontinuumsmekanikk som vi skal etablere i det følgende.[1][2]

En "fluid partikkel" er et infinitesimalt volum av fluidet, med masse, utstrekning, massetetthet osv. Vi kan godt tenke oss en fluid partikkel som en punktmasse. Tanken om at en fluid partikkel kan brukes som utgangspunkt for å beskrive oppførselen til et fluid ble introdusert av Leonhard Euler (1707–1783).

---

[1] Kontinuumshypotesen slutter å være gyldig når vår problemstilling har en karakteristisk lengde som er sammenliknbar med størrelsen på molekylene eller avstanden mellom dem. I så fall kan vi ikke lenger bruke kontinuumsmekanikk som modell og må istedenfor ty til statistisk mekanikk. For å avgjøre om kontinuumshypotesen gjelder kan vi bruke "Knudsen tallet" definert som forholdet mellom "midlere fri veilengde", dvs. den gjennomsnittlige distansen et molekyl beveger seg mellom kollisjoner, og den karakteristiske lengden til vår problemstilling. Dersom Knudsen tallet er under 0.1 kan vi anta at kontinuumshypotesen er tilfredsstilt. Statistisk mekanikk kan anvendes uansett verdien til Knudsen tallet.

[2] I mengdeteori snakker man om en annen "kontinuumshypotese" som ikke har noe med kontinuumshypotesen i fluidmekanikk å gjøre: Antakelsen om at det ikke eksisterer noen mengde som har kardinalitet strengt mellom heltall og reelle tall. Antakelsen ble framsatt i 1878 av Georg Cantor (1845–1918). Det er uendelig mange heltall og uendelig mange reelle tall. Kardinaliteten til en uendelig mengde uttrykker graden av uendelighet. Kardinaliteten til de reelle tallene er større enn kardinaliteten til heltallene. Foreløpig er kontinuumshypotesen i mengdeteori bare en antakelse.

Strømlinjer og partikkelbaner

Vi betrakter en fluid partikkel med posisjon $\boldsymbol{r}_p(t)$. Den beveger seg i et hastighetsfelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Setter vi inn for posisjonen til partikkelen finner vi partikkelens hastighet $\boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t)$.

Partikkelen beveger seg langs en bane som vi angir ved posisjonsvektor som funksjon av tid $\boldsymbol{r}_p(t)$. For å finne banen kan vi løse differensiallikninga for hastigheten uttrykt som den tidsderiverte av posisjonen

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t).$$

Legg merke til at en bane er en reise i rom og tid.

Tidligere har vi definert strømlinjer: Kurver som er overalt tangent til vektorfeltet. Disse er løsninger av differensiallikninga som uttrykker at kurveelementene er tangent til (parallell med) hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Legg merke til at denne likninga ikke er entydig definert dersom hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ endrer seg i tid, derfor skal vi innskrenke definisjonen av strømlinjer til å være et øyeblikksbilde av vektorfeltet, ved fastholdt tid:

Strømlinjer er kurver som er tangent til vektorfeltet ved fastholdt tid.

Dette er vesentlig forskjellig fra en bane som tar hensyn til hvordan feltet endrer seg i tid.

Vi skal nå vise at dersom feltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$, så er banene lik strømlinjene: Vi vet at en infinitesimal forflytning langs en bane er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Dersom vi krysser dette med feltet $\boldsymbol{v}$ har vi $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ og følgelig er kriteriet for strømlinjer oppfylt av banene.

Dersom feltet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ ikke er stasjonært, så er banene ikke lik strømlinjene, fordi øyeblikksbilder av feltet vil se forskjellige ut fra ett øyeblikk til et annet.

Partikkelderivert, eller endring av en egenskap slik det observeres fra en partikkel som beveger seg langs en bane.

La $E(\boldsymbol{r}, t)$ være en skalar egenskap, for eksempel temperatur eller prisen på en vare. Vi skal nå se på endringen av denne egenskapen, slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Det er to årsaker til at observatøren registrerer endring av egenskapen E, delvis fordi E endrer seg i tid, og delvis fordi observatøren flytter seg til et annet sted hvor E har en annen verdi. Endringen i E på grunn av at partikkelen har endret sin posisjon $\Delta\boldsymbol{r}$ i løpet av tid Δt er

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Nå gjør vi samme knep som vi gjorde da vi utledet gradient og retningsderivert, vi ser på endringen med hensyn på bare tid, eller bare posisjon

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) + E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Vi har at

$$E(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t+\Delta t)-E(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t)\approx\frac{\partial E}{\partial t}\Delta t$$

og

$$E(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r},t)-E(\boldsymbol{r},t)\approx\nabla E\cdot\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla E$$

og følgelig får vi

$$\Delta E\approx\frac{\partial E}{\partial t}\Delta t+\Delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla E.$$

Nå deler vi på Δt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}\approx\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\cdot\nabla E$$

og lar $\Delta t\to 0$. Legg merke til at partikkelhastigheten dukker opp i andre ledd på høyre side $\boldsymbol{v}_p=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$. Den tidsderiverte av egenskapen E vi nå får på venstre side er spesiell for en observatør som befinner seg på en fluid partikkel, og vi innfører derfor et spesielt symbol for å markere dette

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial E}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla E.$$

Det første leddet på høyre side kaller vi den lokalderiverte fordi det ikke avhenger av at fluidpartikkelen flytter på seg. Det andre leddet på høyre side kaller vi den konvektivt (eller advektivt) deriverte fordi det avhenger av forflytningen til fluidpartikkelen. Summen av disse kaller vi den partikkelderiverte.

Nå utvider vi beskrivelsen til en vektor egenskap $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$, og setter like godt inn i uttrykket ovenfor

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{F}.$$

I dette uttrykket er det viktig å merke seg at prikken står mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, mens ∇-operatoren skal derivere $\boldsymbol{F}$. Uttrykket $\nabla\boldsymbol{F}$ medfører både derivasjon og multiplikasjon, denne multiplikasjonen skal vi notere uten noe symbol og vi skal kalle den et "dyadisk produkt".

Litt om dyadiske produkter

Vi skal notere dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\boldsymbol{ab}$. Andre bruker symbolet $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ som i praksis betyr det samme.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom α og β og γ er skalarer, og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c})=\alpha\gamma\boldsymbol{ac}+\beta\gamma\boldsymbol{bc}$.

Generelt har vi at et dyadisk produkt ikke kommuterer $\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{bc})$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut dette uttrykket som $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Vi skal forholde oss til visse konvensjoner som kan oppfattes som naturlige, nemlig at prikken virker mellom den første vektoren som dukker opp på høyre og venstre side, og at ∇-operatoren naturlig deriverer mot høyre. I uttrykket for den konvektivt deriverte $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F}$ forstår vi derfor at prikken virker mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, og vi forstår at ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$. Regnestykket gir samme svar uavhengig av om vi utfører prikk eller dyadisk produkt først $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{F})$. Her angir parentesen prioritet for multiplikasjon, mens ∇ skal uansett derivere $\boldsymbol{F}$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut den konvektivt derivert som $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$.

Mer om dyadiske produkter — alternativ konvensjon for gradienten til en vektor

Advarsel: Det som står her kan oppfattes som forvirrende!

Ofte finner man, særlig blant de som bruker notasjonen $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ for å angi tensorprodukt istedenfor notasjonen $\boldsymbol{ab}$ for å angi dyadisk produkt, en alternativ konvensjon som avviker fra det som står beskrevet ovenfor. Alle ser ut til å være enige om at dersom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er vektorer uten derivasjonsoperasjon så kommer retningen til $\boldsymbol{a}$ før retningen til $\boldsymbol{b}$ i produktene $\boldsymbol{ab}$ og $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$. Noen hevder imidlertid at ettersom ∇ er både en vektor og en derivasjonsoperasjon, så skal retningen til ∇ komme etter retningen til $\boldsymbol{b}$ i uttrykket $\nabla \boldsymbol{b}$ eller $\nabla \otimes \boldsymbol{b}$.

Dersom denne alternative konvensjonen benyttes, så må uttrykket for den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives enten

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$$

eller

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{v}$$

eller

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\nabla \otimes \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Uansett skal altså prikken virke mellom retningen til ∇ og retningen til $\boldsymbol{v}$, og ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$.

Vi forstår nå at dersom vi alltid insisterer på å ta prikk-produktet først i uttrykket for den konvektivt deriverte så forsvinner forskjellen mellom disse to konvensjonene. Det er da viktig å alltid skrive parentes rundt skalarproduktet $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$.

Vi forstår nå også hvor viktig det er å sjekke hvilken konvensjon en tekst forholder seg til før vi gir oss i kast med å lese teksten.

I MEK1100 bruker vi konsekvent ikke det som her kalles "alternativ" konvensjon, men i læreboka LH som brukes i MAT1110 skrives Jacobi-matriser, det vil si matriser som svarer til gradienten av en vektor, i henhold til denne alternative konvensjonen. I LH skriver de imidlertid kun ∇ anvendt på en skalarfunksjon, og skriver notasjonen $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ for matrisen som svarer til gradienten av en vektor.

Med LH sin matrisenotasjon kan den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}$$

hvor både $\boldsymbol{F}$ og $\boldsymbol{v}$ er søylevektorer, hvor $\boldsymbol{F}'$ er en Jacobi-matrise, og hvor operasjonen som skal gjøres mellom $\boldsymbol{F}'$ og $\boldsymbol{v}$ er en matrisemultiplikasjon, dvs. en prikk-operasjon. LH skriver altså prikk for skalarprodukt mellom to vektorer, men ikke noe symbol for det som i praksis er en prikk-operasjon mellom en dyade og en vektor.