Forelesning 16/3–2018 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Endring av bensinpris observert av en passasjer i en bil

Vi har kanskje lagt merke til at prisen på bensin endrer seg på en nesten forutsigbar måte i løpet uka? Noen dager er den konsekvent billigere enn andre dager. I tillegg kan vi regne med at dersom vi reiser langt ut i ødemarken, der hvor det nesten ikke bor mennesker, så kan vi regne med at prisen blir dyrere fordi det koster mer å få den fraktet ut dit. Fra disse observasjonene kan vi lage følgende modell for bensinpris, uttrykt ved et skalarfelt som varierer i tid

$$P(x,t) = A + B\cos(\omega t) + Cx$$

hvor $P(x,t)$ er prisen i rom og tid, A er den prisen som bensinen kanskje "burde" ha hatt, $\omega = \frac{2\pi}{1\text{uke}}$ beskriver hvor fort prisen endrer seg i tid (med periode på én uke), t er tid, B beskriver hvor stor variasjon i pris som skyldes den ukentlige endringen, x er avstanden ut i ødemarken, og C beskriver hvor mye prisen øker når vi reiser ut i ødemarken.

For at modellen skal være enkel har vi begrenset oss til at bilen kun kjører langs x-aksen.

Vi betrakter bilen som en "partikkel" med posisjon $x_p(t)$. Hastigheten til bilen er gitt ved $v_p(t) = \frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}$. På den annen side kan vi betrakte trafikken som et hastighetsfelt $v(x,t)$ som er slik at bilen til enhver tid beveger seg med feltets hastighet der hvor bilen til enhver tid befinner seg, $v_p(t) = v(x_p(t),t)$. Vi er ute etter å finne endringen av bensinpris med hensyn på tid, det vil si den tidsderiverte av prisen med hensyn på tid, slik som prisen oppfattes av en passasjer som sitter i bilen mens den beveger seg. Vi skal nå se at det er to måter å løse denne oppgaven.

Én framgangsmåte er å skrive opp bensinprisen akkurat der hvor bilen befinner seg til enhver tid

$$P_p(t) = P(x_p(t),t) = A + B\cos(\omega t) + Cx_p(t)$$

og så regne ut den tidsderiverte

$$\frac{\mathrm{d}P_p(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega B\sin(\omega t) + Cv_p(t).$$

En annen framgangsmåte er å ta den partikkelderiverte av bensinprisen

$$\frac{\mathrm{D}P(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P}{\partial t} + v\frac{\partial P}{\partial x} = -\omega B\sin(\omega t) + vC$$

og deretter sette inn for bilens posisjon. Legg merke til at vi fikk nøyaktig samme svar (etter å ha satt $v = v_p$).

Den siste framgangsmåten hjelper oss å tolke resultatet: Den lokale endringen

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\omega B\sin(\omega t)$$

har å gjøre med at bensinprisen endrer seg i tid, selv om bilen står stille. Den konvektive endringen

$$v\frac{\partial P}{\partial x} = vC$$

har å gjøre med at bilen flytter seg fra ett sted til et annet hvor prisen ikke er den samme. Den totale endringen er summen av den lokale og den konvektive.