Forelesning 6/4–2018 ved Karsten Trulsen

Bevaringslover generelt

I det følgende skal vi utlede diverse bevarlingslover. De tjener til å holde regnskap med hvor mye vi har av “noe” innenfor et kontrollvolum. Dersom det er en endring i mengden av dette “noe” så må det enten skyldes at det er en netto fluks gjennom veggene til kontrollvolumet, eller det må skyldes at det skapes eller tilintetgjøres innenfor kontrollvolumet.

Bevaring av masse: Kontinuitetslikninga

Betingelsen for bevaring av masse kalles kontinuitetslikninga.

Anta vi har et kontinuerlig medium med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at mediet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

La oss betrakte et kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S. Vi stiller to krav til vårt kontrollvolum, det skal være *fastholdt* og *vilkårlig*. Kravet om at kontrollvolumet er vilkårlig medfører at resultatene i det følgende skal gjelde uansett hvilken form eller størrelse kontrollvolumet har.

Den totale massen innenfor V er

$$M(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}\tau$$

Her har vi indikert at massen innenfor kontrollvolumet kan endre seg i tid.

Flukstettheten av masse er gitt ved $\rho\boldsymbol{v}$. Den integrerte fluksen gjennom den lukkede flaten S er

$$Q = \int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor vi holder oss til konvensjonen at flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av kontrollvolumet.

Dersom det ikke skapes eller tilintetgjøres masse innenfor kontrollvolumet så må

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + Q = 0$$

Vi kan ta den tidsderiverte av massen innunder integraltegnet, da blir den til en partiellderivert, og ettersom kontrollvolumet er fastholdt er det ikke bidrag fra tidsderivert av formen til kontrollvolumet

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

Dersom vi benytter Gauss sats for å omgjøre fluksintegralet til et volumintegral får vi

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, og følgelig har vi utledet kontinuitetslikninga på differensial form

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

Alternative former for kontinuitetslikninga
Dersom vi skriver ut divergensleddet får vi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dersom vi føyer sammen de to første leddene i likninga ovenfor har vi

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Homogen tetthet
Dersom tettheten er lik overalt sies den å være *homogen*, i så fall har vi $\nabla \rho = \mathbf{0}$ og kontinuitetslikninga reduserer seg til

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Stasjonær tetthet
Dersom tettheten ikke endrer seg i tid sies den å være *stasjonær*, i så fall har vi $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ og kontinuitetslikninga reduserer seg til

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Spesialtilfelle: Konstant tetthet
Dersom tettheten er både homogen og stasjonær sier vi at den er *konstant*, i så fall må hastigheten være divergensfri $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Spesialtilfelle: Inkompressibelt medium
Dersom den partikkelderiverte av tettheten er lik null, det vil si at en fluidpartikkel ikke får endret sin tetthet når den beveger seg rundt, så må også hastigheten være divergensfri $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Eksempel: Vann strømmer gjennom trakt.
Husk at innen kategorien "fluid" har vi underkategoriene "væsker" og "gasser". Hovedforskjellen mellom væsker og gasser er at ei væske er i praksis inkompressibel mens en gass lett lar seg komprimere.
Vann er ei væske, så vi starter med kontinuitetslikningen for inkompressibelt medium

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Denne kan vi integrere over et kontrollvolum V som er avgrenset av veggene i trakten S_T, et tverrsnitt S_A hvor vannet strømmer inn i trakten med fart v_A, og et tverrsnitt S_B hvor vannet strømmer ut av trakten med fart v_B. La oss anta at strømningshastigheten er vinkelrett på tverrsnittene A og B. Vi innser at det ikke er strømning gjennom traktveggen S_T. Med Gauss lov har vi

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = (\int_{S_t} + \int_{S_A} + \int_{S_B}) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = -\int_{S_A} v_A \, \mathrm{d}\sigma + \int_{S_B} v_B \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Dersom vi i tillegg antar at farten er konstant i hvert tverrsnitt så kan vi uttrykket resultatet ved arealene A og B

$$v_A A = v_B B$$

Følgelig ser vi at farten er størst i tverrsnittet som er minst.

Eksempel: Biltrafikk

Biltrafikk lang vei er et glimrende eksempel for å få innsikt i løsningene til kontinuitetslikninga. Vi ser for oss en motorvei eller landevei med én eller flere parallelle felt, "tverrsnittet" S er antall felt, "volumet" V er strekning ganger antall felt, "tettheten" er antall biler per volum. Trafikken er inkompressibel (langs ett felt) dersom avstanden mellom en bil og forankjørende alltid er den samme. Vi merker oss at biltraffikk kan komprimeres, så den oppfører seg som en "gass".

En person som sitter i en bil kan uttale seg om trafikken er inkompressibel. En person som står ved siden av veien kan uttale seg om trafikken er stasjonær. En person i et helikopter kan uttale seg om trafikken er homogen.

Eksempel: Inkompressibel trafikk som går fra trefelts vei til ettfelts vei

Vi har at $v_A A = v_B B$ for to snitt S_A og S_B. Dersom vi har $A = 3$ og $B = 1$ så vil $v_B = 3v_A$, trafikken vil gå betydelig fortere straks man kommer ut fra flerfelts vei til ettfelts vei.

Dette er typisk oppførsel dersom man skal kjøre ut fra en stor parkeringsplass og ut på en landevei.

Eksempel: Kompressibel trafikk med stasjonær biltetthet

For stasjonær tetthet har vi kontinuitetslikninga $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$. Dersom denne integreres over et kontrollvolum og anvendes med tanke på strømning gjennom trakt eller langs veier, så får vi $\rho_A v_A A = \rho_B v_B B$ for to snitt S_A og S_B.

La oss nå anta at trafikken holder fartsgrensene 100 km/h på trefelts motorvei med $A = 3$, og 80 km/h på ettfelts landevei med $B = 1$. I så fall har vi en relasjon for tetthetene $300\rho_A = 80\rho_B$.

Dette er typisk oppførsel for trafikk som holder fartsgrensen i overgangen mellom flerfelts og ettfelts vei, det er god plass mellom bilene på motorveien og tettere trafikk på landeveien.

Eksempel: Biltrafikk med homogen biltetthet

Til slutt tar vi et eksempel som er litt vanskeligere: Anta en observatør i et helikopter eller en drone ser at trafikken har homogen tetthet ved et gitt tidspunkt t_0. Anta dette skjer i et område hvor en trefelts motorvei (for $x < 0$) går over i en ettfelts landevei (for $x > 0$). Hva forteller i så fall kontinuitetslikninga?

Først innser vi at den adekvate formen til kontinuitetslikninga er

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Vi innser også at dersom trafikken blir langsommere i overgangen fra trefelts til ettfelts vei så vil divergensen til hastigheten være negativ i overgangssonen, det betyr at divergensen til hastigheten vil være avhengig av posisjon. Kontinuitetslikninga ovenfor forteller oss i så fall at dersom tettheten ρ er homogen ved tidspunktet t_0 så kan ikke den tidsderiverte $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ være homogen, og følgelig vil denne trafikken ikke har homogen biltetthet umiddelbart etter tidspunktet t_0.