Forelesning 12/4–2018 ved Karsten Trulsen

Bevaring av bevegelsesmengde — Newtons andre lov

Newtons andre lov sier at et legeme med masse m som blir påvirket av en total kraft $\boldsymbol{F}$ vil få en akselarasjon $\boldsymbol{a}$ i henhold til likninga

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Likninga over introduseres i elementære kurs i fysikk. Vi skal her se hvordan den omformuleres for anvendelse på et fluid.

Eulers likning — Newtons andre lov for ideelt fluid

I virkeligheten er friksjon på grunn av viskositet viktig for bevegelsen til et fluid. Vi skal i det følgende se bort fra viskositet og friksjon. I så fall sier vi at fluidet er ideelt, og likninga vi ender opp med til slutt kalles Eulers likning.

Dersom vi hadde tatt med viskositet og friksjon hadde vi endt opp med Navier–Stokes likning. Dette gjøres i emnet MEK2200.

I det følgende begrenser vi oss til to typer krefter: trykkraft og tyngdekraft.

Newtons andre lov anvendt på fluidpartikkel

Vi betrakter nå en fluidpartikkel som beveger seg, og ikke et fastholdt kontrollvolum!

La fluidpartikkelen ha masse m, volum V avgrenset av overflate S, tetthet $\rho = \frac{m}{V}$, hastighet $\boldsymbol{v}$ og akselerasjon $\boldsymbol{a}$.

Vi antar i tillegg at fluidpartikkelen er del av et kontinuerlig medium med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at mediet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. I så fall vet vi at relasjonen mellom partikkelakselerasjonen og fluidhastigheten er $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$.

Summen av alle krefter som virker på fluidpartikkelen er gitt ved trykkraft og tyngdekraft

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi starter med Newtons andre lov (1)

$$m\boldsymbol{a} = -\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

og benytter uttrykket for partikkelderivert på venstre side, og benytter Gauss sats på høyre side, så får vi

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\int_V \nabla p\,\mathrm{d}\tau + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi nå husker at fluidpartikkelen er infinitesimal, så innser vi at volumintegralet er lik integranden multiplisert med volumet V. Vi bruker at $\rho = \frac{m}{V}$ og får Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

Alternativ utledning: Bevaring av bevegelsesmengde i et fastholdt kontrollvolum

Advarsel: Denne alternative utledningen kan oppfattes som komplisert, unødvendig komplisert i forhold til utledningen ovenfor, i så fall kan man se bort fra denne.

I elementære kurs i fysikk lærer man at endringen i bevegelsesmengde $m\boldsymbol{v}$ til en partikkel med masse m er lik den totale krafta $\boldsymbol{F}$ som virker på partikkelen.

Nå skal vi betrakte et fastholdt og vilkårlig kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S og gjøre regnskap for den totale bevegelsesmengden innenfor kontrollvolumet. Det er to årsaker til at den totale bevegelsesmengden kan endre seg innenfor kontrollvolumet, delvis fordi det strømmer fluid med bevegelsesmengde gjennom flaten S og delvis fordi det virker krefter på fluidet innenfor kontrollvolumet.

Tettheten av bevegelsesmengde er $\rho\boldsymbol{v}$. Den totale integrerte bevegelsesmengden innenfor V er

$$\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau$$

Endringen av den totale bevegelsesmengden per tid er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau$$

Flukstettheten av bevegelsesmengde er gitt ved $(\rho\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ som er et dyadisk produkt. Den integrerte fluksen av bevegelsesmengde ut gjennom den lukkede flaten S (husk at flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av kontrollvolumet) er

$$\int_S \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Den totale trykkrafta som virker på kontrollvolumet er

$$-\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Den totale tyngdekrafta som virker på kontrollvolumet er

$$\int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau$$

Det totale regnskapet for bevegelsesmengde kan derfor skrives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = -\int_S \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma - \int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + \int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau$$

Dersom vi bruker Gauss sats for å omgjøre fluksintegralene til volumintegraler, og samler alle ledd på venstre side, får vi

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + \nabla p - \rho\boldsymbol{g}\right\}\mathrm{d}\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, og følgelig må vi ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + \nabla p - \rho\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

Dette uttrykket kan ekspanderes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p - \rho\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

og vi legger merke til at kombinasjonen første & tredje & fjerde ledd er kontinuitetslikninga, derfor kan vi forenkle til

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p - \rho\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

som er identisk med Eulers likning som ble utledet ovenfor.

Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Eulers likning reduserer seg nå til

$$\nabla p = \rho\boldsymbol{g}$$

Dersom vi antar at z-aksen peker oppover, så har vi $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, og vi får på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Dersom tettheten er konstant har vi løsningen

$$p = p_0 - \rho g z$$

hvor p_0 er en konstant. Dette er formelen for hydrostatisk trykk.

Grensebetingelse der hvor vann møter luft

Tenk på et glass med vann, eller en innsjø. Vi skal utlede en betingelse for trykket på grenseflaten der hvor vann møter luft. Vi gjør dette ved hjelp av et passende kontrollvolum. La kontrollvolumet strekke seg langs grenseflaten slik at den ene siden av kontrollvolumet er i luft og den andre siden er i vann. La disse to sidene har areal A og flatenormalvektorer henholdsvis $\boldsymbol{n}$ og $-\boldsymbol{n}$ hvor vi tenker oss at $\boldsymbol{n}$ peker fra vann mot luft.

La trykket i lufta være p_0 og trykket i vannet være p. I så fall vil den totale trykkrafta på over- og undersiden av kontrollvolumet være $\boldsymbol{F}_A = (p-p_0)A\boldsymbol{n}$. I tillegg kan det virke en kraft fra sidene til kontrollvolumet $\boldsymbol{F}_S$. Fluidet inni kontrollvolumet har masse m og akselerasjon $\boldsymbol{a}$. Newtons andre lov sier i så fall at $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_S = m\boldsymbol{a}$. Dersom vi nå lar tykkelsen på kontrollvolumet gå mot null, og vi antar at det ikke er overflatespenning som virker langs overflaten, så vil både $\boldsymbol{F}_S$ gå mot null og m gå mot null. I så fall har vi utledet at trykket er kontinuerlig på grenseflaten mellom vann og luft:

$$p = p_0 \qquad \text{der hvor vann møter luft}$$

Eksempel: Trykket i stillestående vann som er i kontakt med luft

Vi bruker formelen for hydrostatisk trykk. Det enkleste er å la $z = 0$ der hvor vannet er i kontakt med lufta. Dersom lufttrykket er p_0 så er trykket i vannet

$$p = p_0 - \rho g z$$

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v_x(z)\boldsymbol{i}$$

Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Så må vi regne ut den konvektive akselererasjonen. Vi starter med $\boldsymbol{v} \cdot \nabla = v_x(z)\frac{\partial}{\partial x}$. Deretter $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = v_x(z)\frac{\partial v_x(z)}{\partial x}\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$. Ettersom vi således ikke har verken lokal eller konvektiv akselerasjon, så står vi igjen med to ledd i Eulers likning

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

som er nøyaktig det samme som vi hadde for stillestående fluid, vi ender altså opp med hydrostatisk trykk

$$p = p_0 - \rho g z$$

Dette er egentlig et ganske pussig resultat: Vi ender opp med hydrostatisk trykk i et fluid som på ingen måte står i ro.

Eksempel: Rør rundt i en kopp delvis fylt med vann

Anta vi rører rundt i koppen slik at vannet beveger seg som en karusell

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$$

hvor vi har latt z-aksen peke oppover, $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, og hvor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ er en posisjonsvektor. Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Så må vi regne ut den konvektive akselererasjonen. Vi starter med $\boldsymbol{v} \cdot \nabla = -\omega y \frac{\partial}{\partial x} + \omega x \frac{\partial}{\partial y}$. Deretter $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$. Fra Eulers likning har vi nå følgende bidrag

$$-\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

som vi løser på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Løsningen er

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Nå kan vi i tillegg introdusere kontinuitetsbetingelsen for trykket på den frie overflaten der hvor vann møter luft, der må trykket i vannet være lik lufttrykket p_0. La den frie overflaten være gitt ved $z = \eta(x, y)$. Vi får

$$p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho g \eta(x, y) + c$$

hvor c er en konstant. Dermed har vi oppnådd en formel for hvordan den frie overflaten i en kopp med karusell-roterende vann ser ut

$$z = \eta(x, y) = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + z_0$$

hvor z_0 er en konstant. Dette er en paraboloide som krummer opp.