Forelesning 13/4–2018 ved Karsten Trulsen

Bernoullis likning

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

Vi skal nå forsøke å skrive om så mye som mulig av denne vektorlikninga som en gradient, for derved å kunne integrere den opp til en skalarlikning:

Leddet med tyngdens akselerasjon kan skrives $\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$.

Vi antar at hastighetsfeltet er stasjonært, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.

Vi antar at tettheten er konstant slik at vi kan skrive $\dfrac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\dfrac{p}{\rho}\right)$.

Det konvektivt akselererte leddet kan vi skrive om ved hjelp av identitetene

$$(\nabla\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} - \nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\nabla(\overbrace{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}^{\downarrow}) = \nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} = \nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + \nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} = 2\nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}$$

og følgelig

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

hvor vi har introdusert $\boldsymbol{c} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ for virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

Nå kan vi samle alle gradient-ledd under felles gradient-symbol

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \boldsymbol{0}$$

Vårt mål er nå å kvitte oss med det ene leddet som ikke er en gradient. Dette gjør vi ved å prikke med et infinitesimalt kurveelement $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ langs en strømlinje, husk at strømlinjer var definert ved likninga $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, og vi får

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Vi står igjen med

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\mathcal{B} = \mathrm{d}\mathcal{B} = 0$$

hvor

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

og følgelig har vi Bernoullis likning

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

I det tilfellet at hastighetsfeltet er virvelfritt, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, er det ikke nødvendig at kurveelementet $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er langs en strømlinje, og vi får at uttrykket for $\mathcal{B}$ er lik den samme konstanten overalt. Dersom hastighetsfeltet har virvling kan konstanten være forskjellig fra én strømlinje til en annen.

La oss oppsummere betingelsene for Bernoullis likning:

1. Ideelt fluid — ingen friksjon (viskositet)
2. Stasjonært hastighetsfelt
3. Konstant tetthet

Merk: Bernoullis likning forteller oss ikke hvordan konstanten endrer seg fra én strømlinje til en annen. Dette er det viktig å være klar over, så vi ikke bruker Bernoullis likning i utide. Følgende eksempler illustrerer dette:

Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

For stillestående fluid har vi at virvlinga er null, og Bernoullis likning reduserer seg til

$$p = p_0 - \rho g z$$

som er den hydrostatiske trykkformelen.

I dette tilfellet er det ingen virvling, så konstanten i Bernoullis likning er den samme overalt.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v_x(z)\boldsymbol{i}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, vi må derfor regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er i dette tilfellet rette linjer parallell med bakken. Bernoullis likning forteller oss kun at trykket er konstant i en gitt høyde over bakken. Dette er egentlig ikke et spennende resultat.

Legg spesielt merke til at Bernoullis likning ikke forteller oss at trykket er hydrostatisk i dette tilfellet, slik som vi vet at det er ettersom vi tidligere løste problemet direktet fra Eulers likning.

Eksempel: Rør rundt i en kopp delvis fylt med vann

Anta vi rører rundt i koppen slik at vannet beveger seg som en karusell

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet også virvling. Derfor må vi regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er sirkler i horisontale plan med sentrum i rotasjonsaksen. Bernoullis likning forteller kun at trykket er konstant langs en slik sirkel. Det er heller ikke et spennende resultat.

Legg spesielt merke til at Bernoullis likning ikke forteller oss at overflaten har formen til en paraboloide som krummer opp.