Forelesning 23 den 19/4–2018 ved Karsten Trulsen

Eksperiment "Toricelli" — hvor fort renner vann ut av et kar?

Vi navngir eksperimentet til ære for Evangelista Torricelli (1608–1647) som oppdaget "Toricellis lov" i 1643. Toricelli var inspirert av Galileo Galilei (1564–1642), men levde for tidlig til å være kjent med Newtons lover (Isaac Newton 1642–1726). Vi har lært om Eulers likning som en tilrettelegging av Newtons andre lov for anvendelse på fluider (Leonhard Euler 1707–1783), og om Bernoullis likning som en videre tilrettelegging av Eulers likning dersom visse betingelser er oppfylt (Daniel Bernoulli 1700–1782), og nå skal vi se at Toricellis lov følger fra Bernoullis likning. Dog ble Toricellis lov først oppdaget uten hjelp av Newton/Euler/Bernoulli.

Hvor fort faller en ball?

Først skal vi se på en analogi: Vi slipper en ball med masse m som holdes i ro i en høyde h over bakken. Ballen treffer bakken med en fart v. Dersom vi kan se bort fra friksjon i luft, og at ballens bevegelse vil sette lufta i bevegelse, så må den opprinnelige potensielle energien mgh være lik den kinetiske energien ved nedslag $\frac{1}{2}mv^2$. Dette gir at nedslagsfarten er

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

uavhengig av ballens masse.

Vann som renner ut av et åpent kar

Vårt kar er en vertikal sylinder med diameter $D = 17$ cm, åpent i toppen og lukket i bunnen. Gjennom bunnen er det boret et lite utløpshull med diameter $d = 1$ cm.

Den frie overflaten er i kontakt med luft i en høyde h over bunnen. Vannet renner ut av utløpshullet kommer umiddelbart i kontakt med luft. Følgelig vet vi at vanntrykket øverst og nederst i vannsøylen må være lik lufttrykket.

Overflaten synker med synkefart V, og vi innser relasjonen mellom h og V

$$V = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

(minustegn fordi V er en positiv fart og høyden h avtar).

Det kan innvendes at med en fri overflate som synker så har vi ikke stasjonære betingelser. Vi skal anta at overflaten synker så langsomt at vi i praksis betrakter eksperimentet som stasjonært.

Vi kan finne en relasjon mellom synkefarten V på overflaten og utløpsfarten v på bunnen ved hjelp av kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

Med antakelsen om konstant tetthet faller de to første leddene bort og vi har divergensfri hastighet $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Dersom dette integreres i et volumintegral over alt vann i karet, og vi anvender Gauss sats, får vi at den integrerte volumfluksen gjennom overflaten er lik den integrerte volumfluksen gjennom utløpshullet

$$V\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = v\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

eller

$$v = V\left(\frac{D}{d}\right)^2. \tag{4}$$

Vi har antatt at farten er konstant i tverrsnittet på overflaten, og konstant i tverrsnittet i utløpet.

La oss velge en strømlinje fra overflaten ved $z = h$ til utløpshullet $z = 0$. Husk at lufttrykket er likt $p = p_0$ begge steder. Følgelig gir Bernoullis likning at

$$\frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + gh. \tag{5}$$

Dersom vi substituerer inn (4) får vi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}} \approx \sqrt{2gh}. \tag{6}$$

Tilnærmingen er meget god for vårt eksperiment, med $D = 17$ cm og $d = 1$ cm begår vi en feil i femte siffer!

Vi har nå utledet Toricellis lov $v = \sqrt{2gh}$. Det er egentlig ganske pussig at vi ender opp med samme resultat som fallfarten til en ball i likning (1)!

Dersom vi uttrykker Toricellis lov ved hjelp av synkefarten istedenfor utløpsfarten, og vi benytter relasjonen (2) for å eliminere V, ender vi opp med den separable differensiallikninga

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \sqrt{2gh}.$$

Dersom vi integrer fra tiden t_0 med høyde h_0 til tiden t med høyde h

$$\int_{h_0}^{h}\frac{\mathrm{d}h'}{\sqrt{h'}} = -\int_{t_0}^{t}\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2\,\mathrm{d}t'$$

får vi

$$2\left(\sqrt{h}-\sqrt{h_0}\right) = -\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t \tag{7}$$

eller

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t$$

eller

$$h = h_0 - \sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2\Delta t + \frac{g}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^4(\Delta t)^2 \tag{8}$$

hvor $\Delta t = t - t_0$.

Overflaten synker altså som en parabel med hensyn på tid.

Vi kan derivere med hensyn på tid

$$V = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - g\left(\frac{d}{D}\right)^4 \Delta t$$

Overflatens synkefart avtar altså lineært.

Demonstrasjonsforsøk:

Målingene er lagt inn i et regneark `Toricelli.xls`.

Beregning I er første ledd på høyre side av (8), beregning II er summen av begge ledd på høyre side av (8), avvik er relativ differanse mellom beregnet og målt Δh.

Hvor stor feil har vi begått ved å anta at hastigheten er stasjonær?

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k} \tag{9}$$

og prøver å estimere hvor store alle leddene er, spesielt hvor stort det tidsderiverte leddet er i forhold til de andre.

Mer siden ...