

Temperatur

Temperatur T er en størrelse som kan måles i den vanlige enheten [Celsius](#) °C eller i absolutt skala [Kelvin](#) K. Størrelsen til trinnene på disse to skalaene er den samme. Temperaturen $0\text{ K} = -273,15^\circ\text{C}$ er det absolutte nullpunkt. Relasjonen mellom de to skalaene er

$$\text{Temperatur i } ^\circ\text{C} = \text{Temperatur i K} - 273,15$$

Varme

Varme er termisk energi som kan måles i en passende enhet for energi, for eksempel [Joule](#) J eller kilo Watt timer kWh. Vi har $1\text{ J} = 1\text{ Ws}$, $1\text{ h} = 3600\text{ s}$, og følgelig $1\text{ kWh} = 3,6\text{ MJ}$.

Varme(energi)tetthet — spesifikk og volumetrisk

Et stoff som holder en viss temperatur T vil ha en viss varme eller termisk energi, denne kan vi for eksempel oppgi per masse eller per volum eller per mol av stoffet (ett mol av et stoff er $6,022140857 \cdot 10^{23}$ partikler av stoffet, dette tallet kalles for Avogadros tall). Dersom vi oppgir varmen per masse kaller vi den for *spesifikk varmetetthet* $E(T)$ som har enhet J/kg. Dersom vi multipliserer med massetettheten ρ som har enhet kg/m^3 får vi den *volumetriske varmetettheten* $\rho E(T)$ som har enhet J/m^3 .

Adjektivet *spesifikk* foran navnet på en størrelse indikerer altså at vi har delt på masse.

Vi skal ta for gitt at det vi her kaller *varme(tetthet)* er det samme som man i klassisk termodynamikk kaller *indre energi(tetthet)*. Fra termodynamikken vet vi at indre energi er en funksjon av to termodynamiske tilstandsvariable, for eksempel temperatur T og tetthet ρ , eller temperatur T og trykk p . Vi burde derfor ha skrevet for eksempel $E(T, p)$. I dette kurset er vi stort sett interessert i temperatur-fenomener som skjer ved konstant trykk, så vi skriver derfor bare $E(T)$.

Uttrykket for varmetettheten $E(T)$ er ukjent for oss, men det gjør ikke noe, for vi skal kun være opptatt av små endringer i varmetettheten. Vi skal spesielt være opptatt av hvordan små endringer i varmetetthet kan uttrykkes ved små endringer i temperatur, $\Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial T} \Delta T$.

Spesifikk varmekapasitet

Den deriverte av den spesifikke varmetettheten med hensyn på temperatur, $c = \frac{\partial E}{\partial T}$, kalles for den *spesifikke varmekapasiteten* og vil ha enhet J/(kg K).

Det spiller en rolle om vi beregner den deriverte $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ ved konstant volum V eller ved konstant trykk p . Fra termodynamikken vet vi at indre energi ikke bare er en funksjon av temperatur. Vi skiller derfor mellom den spesifikke varmekapasiteten ved konstant volum c_V og ved konstant trykk c_p . Det lett å forstå den grunnleggende forskjellen på disse to varmekapasitetene: Dersom vi forsøker å varme opp et stoff, og stoffet utvider seg mens trykket holder seg konstant, så vil stoffet utføre arbeid på omgivelsene fordi stoffet vil skyve vekk omgivelsene. Den tilførte energien vil gå delvis til oppvarming av stoffet og delvis til å utføre arbeid på omgivelsene. Om vi

derimot forsøker å varme opp et stoff, og stoffet tvinges til å beholde sitt opprinnelige volum, så vil all den tilførte energien kunne gå til oppvarming. Følgelig forventer vi at $c_p > c_v$. For gasser er både den absolutte og den relative forskjellen større enn for væsker.

Her er en tabell med noen typiske verdier:

Størrelse	c_p	c_v	ρc_p	ρ
Enhet	J/(g K)	J/(g K)	J/(cm ³ K)	kg/m ³
Is (−10°C)	2.05		1.938	916.8
Vann (25°C)	4.1813	4.137	4.1796	997.0
Vann (100°C)	4.1813	4.137	4.2160	958.4
Vanndamp (100°C)	2.080	1.56		
Luft (rombetingelser)	1.012	0.723	0.00121	1.20

Tabellen er satt sammen med tall fra en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity, en.wikipedia.org/wiki/Density og en.wikipedia.org/wiki/Ice.

I dette kurset skal vi være nesten utelukkende interessert i c_p , den spesifikke varmekapasiteten ved konstant trykk, og vi kommer derfor ofte til å skrive bare c uten indeks når vi egentlig mener c_p .

Store temperaturendringer og faseoverganger

For store endringer i temperatur, og spesielt ved faseoverganger mellom fast stoff, væske og gass, vil den spesifikke varmekapasiteten variere betydelig, se tabellen ovenfor. Det er derfor feil å skrive slik Matthews gjør i starten på hans kapittel 8.1 at den volumetriske varmetettheten er ρcT .

Små temperaturendringer uten faseoverganger

For små endringer av temperatur kan vi betrakte den spesifikke varmekapasiteten som en konstant og vi kan skrive Taylor-utviklingen

$$\Delta E \approx c\Delta T$$

hvor $\Delta T = T - T_0$, $\Delta E = E(T) - E(T_0)$, $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ beregnet ved $T = T_0$, og hvor T_0 er en referansetemperatur.

Endring av varmemengde i et kontrollvolum

Vi ser på et kontrollvolum V . Den totale varmen, eller den totale termiske energien, innenfor kontrollvolmet V er

$$\int_V \rho E(T) d\tau$$

Dersom vi endrer temperaturen litt, og vi kan anta at tettheten er omtrent konstant, så vil endringen i den termiske energien være

$$\int_V \rho c \Delta T d\tau$$

Eksempel: Pris for å varme opp luft og vann i hjemmene våre

Prisen for elektrisk energi kan konsulteres på nett, for eksempel på vevsidene <https://www.strompris.no/> eller <https://www.nordpoolspot.com/>. Akkurat nå ser det ut til at energiprisen er omtrent 0,35 kr/kWh. Strømregningen vi betaler består imidlertid av både energiregning og netregning, som en tommelfingerregel kan vi anta at disse to er omtrent like store. Vi skal derfor i det følgende anta at strømregningen vil være omtrent 0,70 kr/kWh.

Prisen for å lufte stua: Anta stua har $V = 10 \cdot 5 \cdot 3 \text{ m}^3$ luft som byttes ut med kald uteluft. Vi må deretter varme opp denne luften $\Delta T = 20 \text{ K}$. Dette vil koste

$$0.00121 \text{ J}/(\text{cm}^3 \text{ K}) \cdot 150 \text{ m}^3 \cdot 20 \text{ K} \cdot 0.70 \text{ kr}/\text{kWh} \approx 0.71 \text{ kr}$$

Prisen for å ta seg et bad: Anta vi må varme opp $V = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \text{ m}^3$ vann $\Delta T = 30 \text{ K}$ for å ta oss et varmt bad. Dette vil koste

$$4.2 \text{ J}/(\text{cm}^3 \text{ K}) \cdot 0.5 \text{ m}^3 \cdot 30 \text{ K} \cdot 0.70 \text{ kr}/\text{kWh} \approx 12 \text{ kr}$$

Utledning av varmelikninga

Vi skal nå gjøre regnskap for den termiske energien i et vilkårlig fastholdt kontrollvolum V . Vi antar at den indre energien kun er en funksjon av temperaturen. Vi antar at fluidet er inkompressibelt. I så fall er det mest riktig å bruke $c = c_p = \frac{\partial E}{\partial T}$ for konstant trykk p .

Endringen av den totale varmen er

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E(T) d\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) d\tau$$

Den totale varmen i kontrollvolumet kan endre seg av tre grunner:

1. Varmekonveksjon — varmetransport fordi fluidet strømmer med hastighet \mathbf{v}
2. Varmeledning — varmetransport som ikke er assosiert med at fluidet strømmer
3. Produksjon av varme i kontrollvolumet — f.eks. kjemiske reaksjoner, friksjon, varmeovner, etc.

Varmekonveksjon er beskrevet av den volumetriske varmeflukstettheten på grunn av konveksjon

$$\mathbf{H}_s = \rho E(T) \mathbf{v}$$

som har enhet $\text{J}/(\text{m}^2 \text{ s})$.

Varmeledningen er beskrevet ved hjelp av Fouriers lov (som sier at varme ledes fra der hvor det er varmt til der hvor det er kaldt) som gir den volumetriske varmeflukstettheten på grunn av ledning

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T$$

som også har enhet $\text{J}/(\text{m}^2 \text{ s})$, og hvor k kalles for varmeledningstall eller termisk konduktivitet og har enhet $\text{J}/(\text{m s K})$.

Den totale varmekonduktivitets tettheten vil være

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l = \rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T$$

Lokal produksjon av varme skal vi notere med symbolet q som har enhet J/m^3 . Vi kan nå sette opp totalregnskapet for varme i kontrollvolumet

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E(T) d\tau = - \int_S (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_V q d\tau$$

som vi kan omforme til kun ett felles volumintegral ved hjelp av Gauss sats, og det faktum at kontrollvolumet er fastholdt

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) + \nabla \cdot (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) - q \right\} d\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig så må det som står inni krøllparentesen være lik null

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E(T)) + \nabla \cdot (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) - q = 0$$

og dette uttrykket kan utvikles

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} E(T) + \rho \frac{\partial E(T)}{\partial t} + E(T) \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla E(T) + \rho E(T) \nabla \cdot \mathbf{v} = k \nabla^2 T + q$$

Her legger vi merke til at kombinasjonen av første, tredje og femte ledd forsvinner på grunn av kontinuitetslikninga.

Nå benytter vi kjerneregelen:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{og} \quad \nabla E = \frac{\partial E}{\partial T} \nabla T = c \nabla T$$

Dermed kan vi skrive

$$\frac{DT}{dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

hvor vi har introdusert varmediffusiviteten $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ som har enhet m^2/s .

Eksempel: Spesialtilfellet $\mathbf{v} = 0$ og kun én romdimensjon x uten varme-produksjon $q = 0$

Vi står igjen med kun varmelikninga

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

og varmekonduktivitets tettheten

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_l = -k \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i}$$

Temperaturen vil øke/avta i tid der hvor temperaturprofilen krummer opp/ned i rom. Varmefluksen vil være orientert i retningen hvor temperaturen avtar.