

Husk fra sist:

Den totale varmekonduktiviteten er

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l = \rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T$$

Varmetransportlikninga er

$$\frac{DT}{dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

Vi antar at varmetransport-prosessene vi skal beskrive vil foregå under betingelser av konstant trykk, derfor skriver vi den spesifikke varmetettheten $E(T)$ som funksjon kun av temperaturen T . Den *spesifikke varmekapasiteten* $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ kan er følgelig det som ofte betegnes med c_p beregnet for konstant trykk.

Eksempel: Finn varmekonduktiviteten gjennom en flate.

Dersom flaten har enhets normalvektor \mathbf{n} så vil komponenten av \mathbf{H} som går igjennom flaten være

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \rho E(T) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - k \nabla T \cdot \mathbf{n}$$

Problemet med dette eksemplet er at vi ikke kjenner uttrykket for $E(T)$, derfor har vi ikke mulighet for å gi noe bedre svar.

Det står feil på side 132 i Matthews der han antyder at den spesifikke termiske energien er gitt ved produktet av c og T . Dette hadde vært riktig dersom han mente endringen i termisk energi for en endring av temperatur, men det er feil dersom han mener den absolutte termiske energien. Tilsvarende er det umulig å gi svar på siste spørsmål i oppgave 2 i kapittel 11.3 på side 193 i Gjevik & Fagerland, i deres fasit antydes det at man skal bruke den feilaktige formelen i Matthews, oppgaven kan repareres dersom man istedenfor spør om netto varmekonduktivitet ut av et kontrollvolum som antydnet i neste eksempel:

Eksempel: Finn netto varmekonduktivitet ut av et kontrollvolum.

La kontrollvolumet V være avgrenset av den lukkede flaten S . Den integrerte varmekonduktivitet ut av kontrollvolumet er

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_S (\rho E(T) \mathbf{v} - k \nabla T) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

La oss avgrense denne problemstillingen ytterligere ved å anta strømningshastighet og temperaturgradient utelukkende i x -retning, $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$ hvor v_0 er en konstant, og $T = T(x)$. La flaten S ha sider som vender mot negativ og positiv x -akse med like store flater A , henholdsvis på venstre side $x = a$ og på høyre side $x = b$. Vi får da

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = A \left[\rho E(T) v_0 - k \frac{dT}{dx} \right]_a^b$$

La oss i tillegg anta at temperaturen på venstre $x = a$ side er T_0 hvor temperaturgradienten er $\frac{dT}{dx} = \beta > 0$, og at temperaturen på høyre side $x = b$ er $T_0 + \Delta T$ hvor

temperaturgradienten er $\frac{dT}{dx} = 0$. Dette tilsvarer for eksempel at kontrollvolumet blir forsøkt oppvarmet av en vifteovn som står på venstre side. Vi får da

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = A [\rho E(T_0 + \Delta T)v_0 - \rho E(T_0)v_0 - k\beta] \approx A [\rho c \Delta T v_0 - k\beta]$$

hvor vi har benyttet uttrykket $\Delta E \approx c\Delta T$.

Eksempel: Dersom vi betrakter luft under vanlige betingelser i et hus, hvor fort skal konveksjonsfarten være for at konveksjon er mer effektiv for å transportere varme enn ledning?

Vi bruker resultatet i forrige eksempel. Vi antar at en karakteristisk temperaturdifferanse kan være $\Delta T = 10$ K og at en karakteristisk temperaturgradient kan være $\beta = 10$ K/m. For luft har vi massetetthet $\rho = 1.2$ kg/m³, spesifikk varmekapasitet $c = c_p = 1.012$ J/(g K) og termisk konduktivitet $k = 0.025$ J/(m s K). Vi får

$$v_0 = \frac{k\beta}{\rho c \Delta T} = \frac{0.025 \cdot 10}{1.2 \cdot 1012 \cdot 10} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$$

Vi bør med andre ord ha respekt for hvor avkjølede en kald trekk kan være, og hvor effektiv en varmluftsvifte kan være for å gi hurtig oppvarming!

Eksempel: En stav har en gitt temperaturfordeling, vil temperaturen øke eller avta? Finn den integrerte varmekonduksjonen.

En stav strekker seg fra $x = 0$ til $x = L$, har konstant tverrsnitt A , termisk konduktivitet k , varmediffusivitet κ , og ved tiden $t = t_0$ er temperaturfordelingen $T(x, t_0) = T_0 + \alpha x^2$ hvor α er en positiv konstant.

For å finne ut om temperaturen vil øke, avta eller holde seg konstant regner vi ut den romlige dobbelderiverte $\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{t=t_0} = 2\alpha$. Etersom staven antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjonshastighet, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Varmelikninga gir oss da for tidspunktet $t = t_0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2\alpha\kappa > 0$$

Temperaturen vil altså øke.

For å finne den integrerte varmekonduksjonen gjennom et tverrsnitt S av staven i $x = x_0$ har vi

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_l = -k\nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} = -2\alpha x$$

og den integrerte varmekonduksjonen gjennom tverrsnittet blir

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{i} \, d\sigma = -2\alpha x_0 A$$

Varmekonduksjonen går altså mot venstre.

Eksempel: En stav har pålagt temperaturer i hver ende. Finn temperaturfordelingen ved likevekt og finn den integrerte varmekonduksjonen.

En stav strekker seg fra $x = 0$ til $x = L$, har konstant tverrsnitt A , termisk konduktivitet k , varmediffusivitet κ , og har pålagt temperatur $T = T_0$ ved $x = x_0$

og $T = T_0 + \Delta T$ ved $x = x_L$. Ettersom staven antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjonshastighet, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En likevektsløsning endrer seg ikke i tid, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Varmelikninga gir oss da

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med randkrav $T = T_0$ ved $x = x_0$ og $T = T_0 + \Delta T$ ved $x = x_L$. Legg spesielt merke til at varmediffusiviteten ikke spiller noen rolle.

Løsningen er $T(x) = \frac{\Delta T}{L}x + T_0$.

Den integrerte varmefluksen gjennom et tverrsnitt S av staven for vilkårlig x er

$$Q = \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{i} d\sigma = -k \frac{\Delta T}{L} A$$

Legg merke til at dette svaret er uavhengig av x , det er et uttrykk for at det ikke hoper seg opp varme noe sted i staven.

Eksempel: Hvor tykt må et vindu eller en yttervegg være for å tilfredsstill myndighetenes krav?

For å angi den isolerende evnen til vinduer, vegger osv. bruker man ofte en størrelse som kalles U -verdi som er definert ved

$$U = \left| \frac{Q}{A\Delta T} \right| = \frac{k}{L}$$

hvor vi har brukt forrige eksempel som motivasjon. Se no.wikipedia.org/wiki/U-verdi. Typiske krav er $U \leq 1.2 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ for vinduer og $U \leq 0.18 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ for yttervegger.

Vi kan nå regne ut hva som er minste tykkelse av diverse materialer, for at myndighetenes krav om isolasjon i vinduer og vegger skal være oppfylt:

Størrelse	k	L_{vindu}	L_{vegg}
Enhet	W/(m K)	m	m
Glass	1	0.83	5.6
Tørr snø	0.11	0.092	0.61
Luft	0.025	0.02	0.14

Vi innser at det ikke er vanskelig å lage en iglo som tilfredsstiller myndighetenes krav!

Vi innser også at glass må være noe av det mest vanvittige byggematerialet dersom det alene skal gi den nødvendige varme-isolasjonen.

Luft hadde vært et særdeles godt byggemateriale dersom det ikke hadde den leie tendensen til å blåse. Ett av eksemplene ovenfor viser hvor liten konveksjonshastigheten trenger å være for at konveksjon er mer effektiv en varmeledning for å transportere varme.

Et byggemateriale som holder luft i ro, for eksempel dobbel- eller trippel-glass, eller porøs luftholdig isolasjon, kan være smart for å oppnå ønsket isolerende evne uten at vegger og vinduer trenger å bli alt for tykke.