Forelesning 26 den 27/4–2018 ved Karsten Trulsen

**Mer generelle koordinater**

Vi skal nå forklare hvordan vi kan benytte andre koordinatsystemer enn de vanlige kartesiske. I MAT1110 har dette blitt diskutert i forbindelse med koordinattransoformer for å lette den tekniske beregningen av flate- og volumintegraler. Vi skal nå gjøre dette litt mer generelt og beskrive hvordan vi også kan uttrykke vektordifferensial-operasjoner som gradient, divergens og virvling i andre koordinater.

**Kartesiske koordinater**

Først må vi bli fortrolig med hva som er de tre viktigste egenskapene til koordinatvektorene $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ som svarer til de vanlige kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$.

De er ortogonale:

| $\cdot$ | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{i}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\boldsymbol{j}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\boldsymbol{k}$ | 0 | 0 | 1 |

De utgjør et høyrehåndsystem:

| $\times$ | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{k}$ | $-\boldsymbol{j}$ |
| $\boldsymbol{j}$ | $-\boldsymbol{k}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{i}$ |
| $\boldsymbol{k}$ | $\boldsymbol{j}$ | $-\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{0}$ |

Og de er rettlinjet:

| | $\boldsymbol{i}$ | $\boldsymbol{j}$ | $\boldsymbol{k}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial y}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |

Vi kan lage en algoritme for å finne koordinatene: Først skriver vi uttrykket for posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Så betrakter vi en liten forflytning i forhold til posisjonsvektor, dette beskriver vi ved det totale differensialet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$$

Regelen for å finne en koordinatvektor blir da:

> Vi står på et sted $\boldsymbol{r}$, hold alle koordinatene konstant bortsett fra én som økes litt, hvilken retning beveger vi oss?

Svaret på dette spørsmålet kan leses ut fra det totale differensialet, og forteller oss hva som er koordinatvektoren assosiert med en koordinat.

Vi ser for eksempel at

$$\boldsymbol{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$$

**Nye koordinater uttrykt ved de kartesiske koordinatene.**

Vi introduserer nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ med tilhørende koordinatvektorer $\{\boldsymbol{i}_\alpha, \boldsymbol{i}_\beta, \boldsymbol{i}_\gamma\}$.

Vi starter med å uttrykke de gamle koordinatene ved hjelp av de nye. Legg merke til at dette kanskje oppleves motsatt av hva man skulle ha trodd var riktig framgangsmåte:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

Posisjonsvektor kan nå skrives ved hjelp av de nye koordinatene og de gamle kartesiske koordinatvektorene

$$\boldsymbol{r} = x(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{i} + y(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{j} + z(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{k}$$

Neste skritt er å bruke oppskriften skissert ovenfor for å finne de nye koordinatvektorene. Nå er det imidlertid ikke lenger sikkert at de tre partiellderiverte $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ har enhets lengde, derfor introduserer vi såkalte *skaleringsfaktorer*

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|, \qquad h_\beta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right|, \qquad h_\gamma = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\right|$$

Enhets koordinatvektorene blir dermed

$$\boldsymbol{i}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$$

**Vi skal begrense oss til ortogonale høyrehåndsystemer**

Det vil være nødvendig å sjekke at koordinatene oppfyller betingelsene for skalar- og kryssprodukt. I utgangspunktet skulle man tro at det var nødvendig å sjekke alle 18 elementer i multiplikasjonstabellene for skalar- og kryssprodukt, men heldivis er det tilstrekkelig å sjekke kun fire betingelser. For å sjekke ortogonalitet er det tilstrekkelig å sjekke

$$\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$$

Dersom ortogonalitet allerede er oppfylt så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt for å sikre at det er et høyrehåndsystem

$$\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$$

**Eksempel: Vis at dersom de fire betingelsene ovenfor er oppfylt, så er betingelsene $\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\alpha$ og $\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$ allerede oppfylt.**

Substituer bort $\boldsymbol{i}_\gamma$ og bruk formelen $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \times (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) = \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\beta - \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\alpha$$

$$\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\alpha - \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$$

**Eksempel: Koordinater som ikke er ortogonale.**

$$x = \alpha + \beta \qquad y = \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha+\beta)\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{i} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ som betyr at koordinatene ikke er ortogonale.

**Eksempel: Ortogonale koordinater som ikke er et høyrehåndsystem.**

$$x = \beta \qquad y = \alpha \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = \beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{j} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} \qquad h_\beta = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Derimot har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = -\boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette ikke er et høyrehåndsystem.

Dette er et venstrehåndsystem.

**Eksempel: Et ortogonalt høyrehåndsystem som er rettlinjet.**

$$x = \alpha + \beta \qquad y = -\alpha + \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha+\beta)\boldsymbol{i} + (-\alpha+\beta)\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \qquad h_\alpha = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \frac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Dessuten har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette er et høyrehåndsystem. I tillegg har vi at alle de nye koordinatvektorene er konstant, uavhengige av koordinatene, som betyr at systemet er rettlinjet.

**Infinitesimalt kurveelement**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha + h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta + h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma$$

**Gradient**
La $f$ være et skalarfelt. Vi kan finne gradienten til $f$ fra det totale differensialet

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

som vi skal kreve er lik den retningsderiverte med gradienten

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Ettersom vi har begrenset oss til ortogonale koordinater så er det enkelt å se at gradienten av en skalar er

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

Tilsvarende kan vi skrive uttrykket for del-operatoren

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

I dette uttrykket tenker vi oss at derivasjonsoperasjonene skal virke mot høyre for å anvendes på det som måtte komme til høyre for del-operatoren.

**Flateelement**
Et flateelement med form av et parallellogram som spennes ut av to vektorer. Vi skal la de to utspennende vektorene være leddene i uttrykket for det infinitesimale kurveelementet, for eksempel de tre opplagte flatene

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta = h_\alpha h_\beta \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \times h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma = h_\beta h_\gamma \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \\ h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma \times h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha = h_\gamma h_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}\alpha \end{cases}$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem. De ender opp med å beregne en Jacobi-determinant.

**Volumelement**
Et volumelement med form av et parallellepiped som spennes ut av tre vektorer. Vi skal la de to utspennende vektorene være leddene i uttrykket for det infinitesimale kurveelementet,

$$\mathrm{d}\tau = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \cdot h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma = h_\alpha h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem. De ender opp med å beregne en Jacobi-determinant. Vårt produkt av tre skaleringsfaktorer er lik denne Jacobi-determinanten.