

Divergens i krumlinjede koordinater

Vi starter med følgende uttrykk som “definisjon” på hva vi skal mene med divergens

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (1)$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V . Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Vi skal tenke oss at volumet vi integrerer over kan ha vilkårlig komplisert form i de “opprinnelige” kartesiske koordinatene, men når vi representerer det samme volumet i de “nye” koordinatene er det en boks med sentrum i $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ og med sidekanter $(\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma)$. Vi kan tenke oss de nye koordinatene som en enklere parameterisering.

Når vi snakker om volumet, så mener vi det “opprinnelige” volumet i det kartesiske koordinatsystemet, dette skal vi nå regne ut ved hjelp av de nye koordinatene

$$V = \int d\tau = \iiint h_\alpha h_\beta h_\gamma \, d\alpha d\beta d\gamma \approx h_\alpha h_\beta h_\gamma \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider), og splitte opp integralet i bidrag fra hver side

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

1. Flaten $\alpha = \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\alpha(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta, \gamma)$ og $d\sigma = h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$.

$$\int_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} \Delta\beta \Delta\gamma$$

2. Flaten er $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\beta$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\beta(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\alpha h_\gamma d\alpha d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma$.
3. Flaten er $\gamma = \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\gamma$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $d\sigma = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta$.
4. Flaten er $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\gamma$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $d\sigma = h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta$.

5. Flaten er $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\beta$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\beta(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\alpha h_\gamma d\alpha d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma$.
6. Flaten er $\alpha = \alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_\alpha$, på flaten har vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_\alpha(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)$ og $d\sigma = h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6:

$$\left(\int_{S_1} + \int_{S_6} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} \Delta\beta \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma v_\alpha) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 2 og 5:

$$\left(\int_{S_2} + \int_{S_5} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)}^{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma v_\beta) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 3 og 4:

$$\left(\int_{S_3} + \int_{S_4} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx [h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})}^{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha \Delta\beta \approx \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta v_\gamma) \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$ er felles faktor for fluksintegralet i teller og volumet i nevner i den opprinnelige formelen for divergens. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de tre delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Til slutt har vi

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma v_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta v_\gamma) \right\}$$

Virvling i krumlinjede koordinater

Vi starter med følgende uttrykk som “definisjon” på hva vi skal mene med virvling

$$\mathbf{n} \cdot \text{curl } \mathbf{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

Her er λ en lukket kurve som omslutter en flate S med areal A . Flaten S har enhets normalvektor \mathbf{n} . Kurven λ og flatenormalvektoren \mathbf{n} er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven λ . Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt et punkt i grensen at flaten skrumper inn til punktet.

Vi skal tenke oss at den lukkede kurven λ kan ha vilkårlig komplisert form i de “opprinnelige” kartesiske koordinatene, men når vi representerer den samme i de “nye” koordinatene er det et rektangel med sentrum i $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ orientert parallelt med $\beta\gamma$ -planet og med sidekanter $\Delta\beta$ og $\Delta\gamma$. Vi har normalvektoren $\mathbf{n} = \mathbf{i}_\alpha$ i positiv α -retning, og orienterer kurven λ i henhold til høyrehåndsregelen. Vi kan tenke oss de nye koordinatene som en enklere parameterisering.

Når vi snakker om arealet, så mener vi det “opprinnelige” arealet i det kartesiske koordinatsystemet, dette skal vi nå regne ut ved hjelp av de nye koordinatene

$$A = \int d\sigma = \iint h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma \approx h_\beta h_\gamma \Delta\beta \Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene i integrasjonsretning med 1 nederst, og splitte opp integralet i bidrag fra hver side

$$\oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^4 \int_{\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

1. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $|\beta - \beta_0| \leq \frac{\Delta\beta}{2}$ og $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = h_\beta v_\beta d\beta$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.
2. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = h_\gamma v_\gamma d\gamma$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.
3. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = -h_\beta \mathbf{i}_\beta d\beta$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -h_\beta v_\beta d\beta$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[-h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.
4. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $d\mathbf{r} = -h_\gamma \mathbf{i}_\gamma d\gamma$. Langs siden har vi $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -h_\gamma v_\gamma d\gamma$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[-h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3:

$$[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\gamma - [h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta \approx - \frac{\partial}{\partial\gamma} (h_\beta v_\beta) \Big|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$$

Side 2 og 4:

$$[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma - [h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\beta} (h_\gamma v_\gamma) \Big|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta \Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for sirkulasjonsintegralet i teller og arealet i nevner i den opprinnelige formelen for virvling. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de to delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Merk at for det ene valget av normalvektor \mathbf{n} i utregningen ovenfor, så har vi kun bestemt én komponent av virvlingen. Det vil være nødvendig å gjøre samme regnestykke to ganger til, med normalvektor \mathbf{n} orientert i de to ortogonale retningene, for å bestemme alle komponentene av virvlingen.

Til slutt viser det seg at vi kan presentere sluttresultatet på en meget kompakt måte ved hjelp av en determinanter

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \mathbf{i}_\alpha & h_\beta \mathbf{i}_\beta & h_\gamma \mathbf{i}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial\beta} & \frac{\partial}{\partial\gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix}$$