MEK1100 forelesning 1, 15/1–2024 ved Karsten Trulsen

PDF presentasjon av emnet

Vi starter med å tolke emnets navn:

MEK1100 — FELT-TEORI OG VEKTOR-ANALYSE

De understrekede ordene må tolkes, og vi starter bakerst:

Analyse
Det betyr at vi skal derivere og integrere.

Vektor
Vi kan like godt utvide til *skalar*, *vektor*, *dyade*, og *tensor* av rang n:
En *skalar* er noe som har en størrelse som kan angis med ett tall. Eksempler er: fart (engelsk "speed") v, temperatur T.
En *vektor* er noe som har både størrelse og retning. Eksempler er: hastighet (engelsk "velocity") $\boldsymbol{v}$, posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$.
Legg spesielt merke til posisjonsvektoren $\boldsymbol{r}$, det er en angivelse av et sted i form av en vektor som har utgangspunkt i et referansepunkt som vi kaller origo.
Størrelsen (lengden) til en vektor angis med et par vertikale streker slik: $v = |\boldsymbol{v}|$ (fart = størrelsen til hastighet), $r = |\boldsymbol{r}|$ (avstanden fra origo til et punkt = lengden til posisjonsvektor).
Vi kan konstruere en enhetsvektor, altså en vektor med lengde 1, ved å ta en vilkårlig vektor og dele med sin lengde. Enhetsvektor i posisjonsvektor sin retning er $\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{r}/r$.
Vi skal insistere på forskjellig notasjon for skalarer og vektorer. Dersom v angir en fart (en skalar), så kan hastigheten (en vektor) angis enten med fet skrift $\boldsymbol{v}$ eller med pil over $\vec{v}$ eller med strek under $\underline{v}$, eller med notasjonen $\mathbb{v}$ eller med annen notasjon som tydelig skiller vektor og skalar.
Vi er helt enig i bemerkningen på side 165 i LH, at hastighet (engelsk "velocity") er vektoren $\boldsymbol{v}$, mens fart (engelsk "speed") er skalaren $v = |\boldsymbol{v}|$.
Et eksempel på en *dyade* er to vektorer stilt opp etter hverandre, $\boldsymbol{ab}$. Dyaden har følgelig to retninger, første retning gitt ved $\boldsymbol{a}$ og andre retning gitt ved $\boldsymbol{b}$. Rekkefølgen er vesentlig.
Et eksempel på en *tensor* av rang n er n vektorer stilt opp etter hverandre. Nok en gang er rekkefølgen vesentlig. Følgelig innser vi at en skalar er en tensor av rang 0, en vanlig vektor er en tensor av rang 1, en dyade er en tensor av rang 2, etc.

Felt
Med et "felt" skal vi forstå noe som avhenger av posisjon $\boldsymbol{r}$, og som i tillegg er entydig definert som funksjon av posisjonen.
Vi kan godt ta med tiden t, i så fall betyr "felt" en entydig funksjon av posisjon for fastholdt tid.
Vi har skalarfelt, vektorfelt, og tensorfelt av rang n.
Eksempel på skalarfelt: temperatur $T(\boldsymbol{r}, t)$ som funksjon av posisjon $\boldsymbol{r}$.

Eksempel på vektorfelt: posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ er åpenbart en entydig funksjon av posisjon $\boldsymbol{r}$, hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ som funksjon av posisjon $\boldsymbol{r}$, kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ som funksjon av posisjon $\boldsymbol{r}$.

Eksempel: Tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet nedover, tyngdekrafta som virker på en masse m er $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$.

Eksempel: Newtons gravitasjonslov sier at tyngdekrafta fra et legeme med masse M på et legeme med masse m med innbyrdes avstand r er gitt ved $\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{i}_r$ hvor G er den universelle gravitasjonskonstanten og $\boldsymbol{i}_r$ er en enhetsvektor som peker fra legemet med masse M mot legemet med masse m.

Eksempler på vektorstørrelser som vi ikke skal kalle felt:

Følgende størrelser skal vi ikke kalle "felt" fordi de ikke oppfyller kravet om å være entydig bestemt:

- Friksjonskraft $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$
- Coriolis kraft $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}$
- Lorentz kraft $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E}$

Her er μ en friksjonskoeffisient, $\boldsymbol{v}$ er hastigheten til et legeme eller en partikkel, m er massen til partikkelen, $\boldsymbol{\Omega}$ er vinkelhastigheten til jorda (vi skal lære mer om den snart), q er den elektriske ladningen til partikkelen, $\boldsymbol{B}$ er magnetisk felt, og $\boldsymbol{E}$ er elektrisk felt. Vi skal ikke jobbe med elektromagnetisme i dette emnet, og det gjør derfor ikke noe om man ikke kan noe om dette fra før.

Vi skal ikke anse disse kreftene som "felt" fordi de ikke er entydig definert som funksjon av posisjon, fordi vi ikke ønsker å kreve at hastigheten $\boldsymbol{v}$ skal være entydig gitt som funksjon av posisjon. Vi oppfatter altså ikke friksjon som en feltstørrelse fordi den avhenger av hvordan bevegelsen skjer og ikke bare av hvor bevegelsen skjer.

Eksempel

Du kjører langs en vei og ser dette skiltet:



Er dette en angivelse av fart eller hastighet?

Svar: Dette er en fart fordi skiltet sier ikke i hvilken retning man skal kjøre.

La oss regne litt:

Rotasjon som stivt legeme

La $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ være posisjonsvektor og la $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) = \omega\boldsymbol{k}$ være vinkelhastighetsvektor for en rotasjonsbevegelse. Vi har her latt rotasjonsaksen gå langs z-aksen.

Vi regner ut hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$$

og tilhørende fartsfelt

$$v = |\boldsymbol{v}| = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$$

Farten er proporsjonal med avstanden til rotasjonsaksen.

Hastigheten er rettet i henhold til høyrehåndsregelen for kryssproduktet: Dersom vi legger høyre tommel langs vinkelhastighetsvektoren $\boldsymbol{\omega}$ så går rotasjonen i retningen til de fire krummede fingrene. Vi skal angi denne rotasjonsretningen ved å si at tuppen av tommelen er "nord".

Begrepet "nord" forstår vi altså som en angivelse av en rotasjonsretning.

Vi skal snakke mye mer om slik rotasjon videre utover i emnet.

Neste gang skal vi se hvordan vi kan tegne dette feltet, for hånd og med datamaskin.