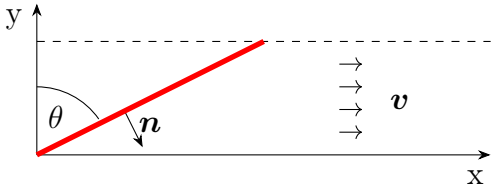
MEK1100 forelesning 10, 14/2–2024 ved Karsten Trulsen

Husk at vi sist så på volumfluks av ei elv gjennom snitt rett på tvers. Vi gjør nå en endring slik at snittet er på skrå:

Eksempel: Volumfluks — strømingen i ei elv gjennom snitt på skrå
Vi fortsetter å betrakte samme elv med samme konstante hastighet $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$ i x-retning, men nå lar vi tverrsnittet S stå på skrå over elva med vinkel θ i forhold til y-aksen. Finn volumfluksen $Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$.



Først må vi bestemme flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$, som vi ønsker skal ha positiv komponent i x-retning. Det er flere måter å gjøre dette, her skisserer vi to alternativer:

Alternativ 1: Vi kan beskrive tverrsnittet som en ekviskalarflate. Vi har $\tan\theta = \frac{x}{y}$ og derfor kan tverrsnittet beskrives som ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = x\cos\theta - y\sin\theta = 0$. Gradienten til skalarfunksjonen β er en normalvektor, og normalisert blir dette $\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$.

Alternativ 2: Vi kan introdusere en tangentvektor på skrå over elva $\boldsymbol{t} = \cos\theta\boldsymbol{j} + \sin\theta\boldsymbol{i}$, og finne normalvektor til den skrå flaten ved å ta kryssproduktet med enhetsvektor i z-retning $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{k} = \cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$.

Vi ser at arealet til det skrå tverrsnittet er $A/\cos\theta$. Vi kan tenke oss det skrå tverrsnittet som en hypotenus og snittet rett på tvers som en katet.

Til slutt regner vi ut volumfluksen gjennom det skrå tverrsnittet

$$Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_S v\boldsymbol{i} \cdot (\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}) \, \mathrm{d}\sigma = v\cos\theta \int_S \mathrm{d}\sigma = (v\cos\theta)\frac{A}{\cos\theta} = vA$$

hvor vi har benyttet at v og $\cos\theta$ er konstant så de kan settes utenfor integralet.

Vi fikk samme svar som tidligere! Det burde ikke være overraskende at det ikke renner mer vann gjennom et skrått tverrsnitt enn gjennom et snitt rett på tvers. Dette understreker et viktig prinsipp: Det er normalkomponenten til strømningen gjennom en flate som gir bidrag til gjennomstrømningen.

Fluks ut av en lukket flate

En flate er lukket dersom den avgrenser et volum. For en lukket flate rundt et avgrenset volum har vi en konvensjon som sier at flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av det avgrensede volumet.

Eksempel: Integrert fluks av $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ut av overflaten til enhetsterning
La terningen ha utstrekning $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ og $0 \le z \le 1$. Den lukkede flaten S splittes opp i seks sider, S_m, og vi nummererer sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

1. Flaten S_1 er $x = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 1$, den integrerte fluksen ut av flaten er 1.

2. Flaten S_2 er $y = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

3. Flaten S_3 er $z = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

4. Flaten S_4 er $z = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

5. Flaten S_5 er $y = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

6. Flaten S_6 er $x = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

Total integrert fluks blir

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{m=1}^{6} \int_{S_m} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 1.$$

Mer generelle flater, parametrisering av en generell flate

Husk at arealet av et parallellogram som spennes ut av to vektorer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er gitt ved størrelsen til kryssproduktet $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$. Retningen til kryssproduktet står normalt på flaten. Vi kan skaffe oss enhetsnormalvektor ved $\boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|}$.

Parametrisering av generelle flater

(LH 3.9, M 2.3.2)

Vi skal se for oss en flate S i rommet. Rommet er tredimensjonalt, mens flaten er todimensjonal, derfor forventer vi at vi kan parametrisere flaten med to skalarer v og w. Hvert punkt på flaten vil da være gitt ved en 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(v, w)$ hvor (v, w) befinner seg i et 2D parameterrom.

Vi kan konstruere infinitesimale tangentvektorer til overflaten ved å se på endringen i posisjonsvektor på flaten når kun én av parametrene endrer seg om gangen

$$\Delta \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}(v + \Delta v, w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v$$

$$\Delta \boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{r}(v, w + \Delta w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \Delta w$$

Når vi lar endringene i parametrene bli vilkårlig små, $\Delta v \to 0$ og $\Delta w \to 0$, bytter vi om fra Δ til infinitesimal d og vi har eksakt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \, \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

Nå kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Legg merke til at vi kan finne normalvektor og flateelement hver for seg

$$\mathrm{d}\sigma = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}|}$$

Husk at vi har allerede lært en alternativ måte å finne flatenormalvektoren, nemlig dersom vi kan uttrykke flaten som en ekviskalarflate, ved hjelp av en skalarfunksjon $\beta(x, y, z) =$ konstant, så kan enhetsflatenormalvektoren skrives

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|},$$

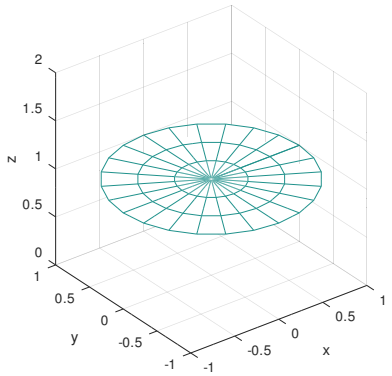
men dersom vi bruker dette alternativet har vi ingen oppskrift for å finne $\mathrm{d}\sigma$.

Eksempel: Sirkelskive med radius R i høyde h over xy-planet og med sentrum i z-aksen

La parameterrommet være $0 \leq r \leq R$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sirkelskiven kan skrives

$$\boldsymbol{r}(r, \theta) = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

Dette er illustrert i figuren for $R = h = 1$



Så regner vi ut

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pm\boldsymbol{k} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{k}$ og $\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Vi kunne også ha skrevet skiven som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z = h$ og utledet $\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$.

Arealet til sirkelskiven er lett å regne ut

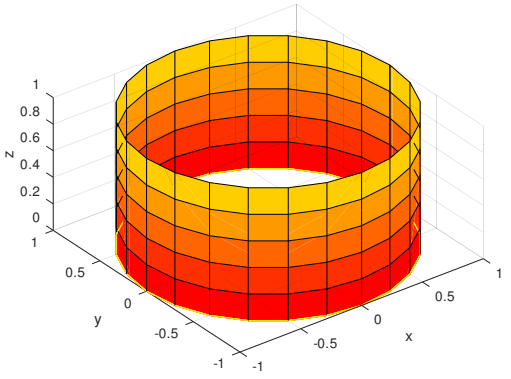
$$A = \int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi R^2$$

Eksempel: Sylinder med radius R fra xy-planet og opp en høyde h med z-aksen som senterakse

La parameterrommet være $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq h$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sylinderen kan skrives

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Dette er illustrert i figuren for $R = h = 1$



Vi regner ut

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -R\sin\theta\boldsymbol{i} + R\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \pm R(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$ og $\mathrm{d}\sigma = R\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

Vi kunne også ha skrevet sylinderen som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 = R^2$ og utledet $\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$. For å innse at vi får samme svar identifiserer vi $x = R\cos\theta$ og $y = R\sin\theta$.

Arealet til sylinderen er lett å regne ut

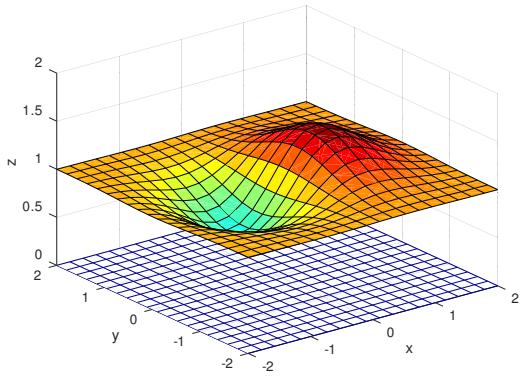
$$A = \int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^h\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 2\pi Rh$$

Eksempel: Et terreng med høyde $z = h(x, y)$ over xy-planet

La parameterrommet være xy-planet. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt i terrenget kan skrives

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + h(x, y)\boldsymbol{k}$$

Et eksempel er vist i figuren hvor parametriseringen i xy-planet er vist under selve terrenget



Vi regner ut

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\left(\boldsymbol{k} - \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

og herfra kan vi se at $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Vi kunne ha skrevet terrenget som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, og herfra kunne vi ha funnet flatenormalvektoren, men vi hadde i så fall ikke hatt noen oppskrift for å finne flateelementet $\mathrm{d}\sigma$.