MEK1100 forelesning 12, 21/2–2024 ved Karsten Trulsen

Husk definisjonen av divergens

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V.

Ekspansjon, kontraksjon og divergensfritt felt

- Dersom $\nabla\cdot\boldsymbol{v} > 0$ sier vi feltet er en ekspansjon, eller har netto utstrømning.
- Dersom $\nabla\cdot\boldsymbol{v} < 0$ sier vi feltet er en kontraksjon, eller har netto innstrømning.
- Dersom $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ sier vi feltet er divergensfritt. Noen ganger kalles dette et inkompressibelt felt med inspirasjon fra fluidmekanikk, andre ganger kalles dette et solenoid-felt med inspirasjon fra elektromagnetisme (Wikipedia:Solenoid; et magnetfelt er divergensfritt).

Vi har tidligere sett at posisjonsvektor er en ekspansjon, og har divergens lik dimensjonen til rommet. Vi har også sett at rotasjon som stivt legeme er divergensfritt. Her kommer det et nytt og mer omfattende eksempel:

Eksempel: Mer generell rotasjon, ikke nødvendigvis som stivt legeme
La hastighetsfeltet være

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{(x^2+y^2)^n}$$

hvor n er et vilkårlig tall. For $n = 0$ har vi rotasjon som stivt legeme.

La oss regne ut divergensen

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^n}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^n}\right) = 0$$

Følgelig vet vi at feltet er divergensfritt. Dette betyr at feltet kan egne seg som en beskrivelse av hastigheten til en væske, for eksempel for bevegelse av vann. Væsker har den egenskapen at de i praksis ikke lar seg komprimere.

La oss illustrere feltet med et vektor pileplott. For å gjøre det kan vi først undersøke om feltet har stagnasjonspunkter $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ eller singulære punkter hvor enten $|\boldsymbol{v}| \to \infty$ eller $\boldsymbol{v}$ ikke er entydig definert. Vi innser at det er kun origo som kan være enten stagnasjonspunkt eller singulært punkt. La oss introdusere polare koordinater

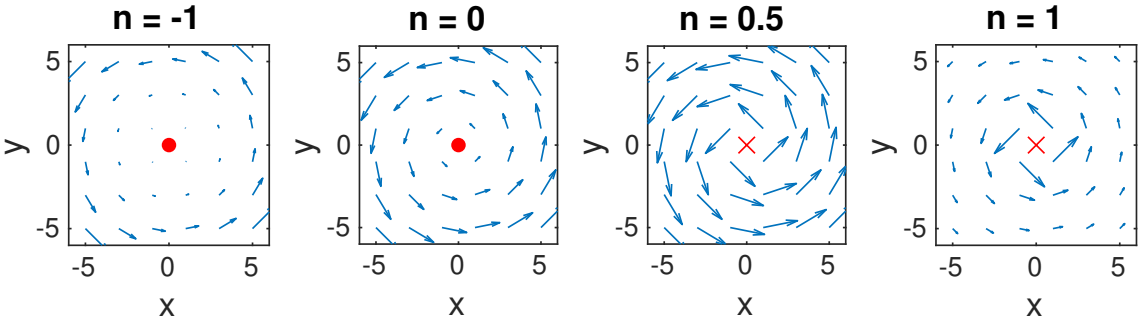
$$x = r\cos\theta \qquad \text{og} \qquad y = r\sin\theta$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$ er avstand til origo. Hastighetsfeltet blir da

$$\boldsymbol{v} = r^{1-2n}(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$

Nå ser vi at origo ($r = 0$) er et stagnasjonspunkt for $n < 1/2$ og et singulært punkt for $n \geq 1/2$. Spesielt ser vi at for $n = 1/2$ så er feltet ikke entydig definert i origo, og for $n > 1/2$ er feltet uendelig i origo.

Nedenfor har vi markert stagnasjonspunkt med rød •, og vi har markert singulære punkt med rød ×:



Alle disse plottene viser at det er en global rotasjonsbevegelse rundt origo. Vi kan karakterisere denne globale rotasjonsbevegelsen ved å regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel med radius r med sentrum i origo. Sirkelen kan parametriseres som

$$\boldsymbol{r}(\theta) = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} \qquad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Differensialet av posisjonsvektor er

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\theta) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = r(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta$$

Vi har fra tidligere

$$\boldsymbol{v} = r^{1-2n}(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$

og kan regne ut

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = r^{2-2n}\,\mathrm{d}\theta$$

Nå er det enkelt å finne sirkulasjonen

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} r^{2-2n}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r^{2-2n} > 0$$

Vi legger altså merke til at sirkulasjonen alltid har samme fortegn, og er aldri lik null, uansett verdien til n.

Fra dette resultatet kan vi konkludere at det alltid er en global bevegelse i samme retning.

Nå ønsker vi å studere om det er en lokal rotasjonsbevegelse i hvert punkt. Da introduserer vi virvling:

Virvling (curl)

(M 3.4, GF 4.4, LH 6.13)

En enkel definisjon med tanke på å regne ut virvling gis i LH kap. 6.13:

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \quad (1)$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

Vi ønsker imidlertid en alternativ definisjon av virvling som hjelper oss bedre å forstå intuitivt hva virvlingen faktisk beskriver. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.4. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan virvling generaliseres til krumlinjede koordinater senere i emnet:

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

Her er γ en lukket kurve som omslutter en flate S med areal A. Flaten S har enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$. Kurven γ og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven γ. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt et punkt i grensen at flaten skrumper inn til punktet.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (2) så følger differensialuttrykket (1) som en konsekvens.

Vi lar γ være et rektangel orientert langs de kartesiske aksene slik at det blir lett å regne på i kartesiske koordinater: Et rektangel med ett hjørne i (x_0, y_0, z_0) og motsatt hjørne $(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ orientert parallelt med yz-planet og med sidekanter Δy og Δz. Vi har normalvektoren $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ i positiv x-retning, og orienterer kurven γ i henhold til høyrehåndsregelen.

1. Siden er $x = x_0$, $y_0 \le y \le y_0 + \Delta y$ og $z = z_0$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 + t)\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ for $0 \le t \le \Delta y$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y$.

2. Siden er $x = x_0$, $y = y_0 + \Delta y$ og $z_0 \le z \le z_0 + \Delta z$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 + \Delta y)\boldsymbol{j} + (z_0 + t)\boldsymbol{k}$ for $0 \le t \le \Delta z$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\Delta z$.

3. Siden er $x = x_0$, $y_0 + \Delta y \ge y \ge y_0$ og $z = z_0 + \Delta z$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 + \Delta y - t)\boldsymbol{j} + (z_0 + \Delta z)\boldsymbol{k}$ for $0 \le t \le \Delta y$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)\Delta y$.

4. Siden er $x = x_0$, $y = y_0$ og $z_0 + \Delta z \ge z \ge z_0$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + (z_0 + \Delta z - t)\boldsymbol{k}$ for $0 \le t \le \Delta z$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3: $v_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y - v_y(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)\Delta y \approx -\frac{\partial v_y}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z$.

Side 2 og 4: $v_z(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\Delta z - v_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z \approx \frac{\partial v_z}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z$.

Vi har følgelig sirkulasjonsintegralet

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{i} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})\, \Delta y\, \Delta z$$

Legg merke til at i grensen $\Delta y \to 0$ og $\Delta z \to 0$ så krymper kurven γ inn til et punkt, alle tilnærmingene vil bli eksakt, og vi har at definisjonen (2) impliserer (1), dog har vi egentlig kun vist det for vårt spesielle valg $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$.

Vi må egentlig gjenta utregningen ovenfor for to andre valg av normalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ for å bestemme alle komponentene av virvlingen. Vi nøyer oss imidlertid med å bare slå fast

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{n} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

for vilkårlig $\boldsymbol{n}$.

Tilbake til vårt eksempel på mer generell rotasjon, ikke nødvendigvis som stivt legeme

Nok en gang ser vi på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{(x^2 + y^2)^n}$$

hvor n er et vilkårlig tall. Husk at dersom $n \geq 1/2$ er origo et singulært punkt, dersom $n < 1/2$ er origo et stagnasjonspunkt, og dersom $n = 0$ er dette rotasjon som et stivt legeme. Se illustrerende figur ovenfor!

Vi kan nå regne ut virvlingen

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^n} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^n} \right) \right] = \frac{2(1-n)}{(x^2 + y^2)^n} \boldsymbol{k}$$

Spesielt ser vi at virvlingen kan være rettet i både positiv og negativ z-retning, og kan også være lik null.

Virvlingen peker i negativ z-retning for $n > 1$, feltet er virvelfritt for $n = 1$, og virvlingen peker i positiv z-retning for $n < 1$.

Kommentar om virvelfritt felt

Det at feltet er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, betyr at man ikke har en tendens til å rotere rundt seg selv, men det kan likevel være en global sirkulerende bevegelse slik som i eksemplet ovenfor.

Retrograd og prograd bevegelse

Denne terminologien er mest vanlig brukt i astronomien om planetbevegelse, se Wikipedia: Retrograd og prograd bevegelse, men vi kan forsøke å generalisere terminologien for å angi om en global rotasjonsbevegelse er lik eller motsatt den lokale rotasjonen rundt seg selv:

- Dersom virvlingen er orientert likt med sirkulasjonen sier vi rotasjonsbevegelsen er prograd — for vårt eksempel skjer dette for $n < 1$.
- Dersom virvlingen er orientert motsatt av sirkulasjonen sier vi rotasjonsbevegelsen er retrograd — for vårt eksempel skjer dette for $n > 1$.

Nå burde det være ganske klart at den globale bevegelsen man har i en rotasjonsbevegelse ikke trenger å være den samme som den lokale rotasjonen man opplever rundt seg selv!

Praktisk oppgave:

Er strømning nær sluket i en vask prograd eller retrograd?

Er strømning når vi rører rundt i en kopp prograd eller retrograd?

Oppgaven er å fylle vann i en vask eller et badekar, eller i en kopp eller en balje. Ta litt støv fra gulvet eller små papirbiter og strø over vannoverflaten. Rør om. Trekk eventuelt ut proppen.

Studer hvordan støvkornene roterer rundt seg selv i forhold til deres globale rotasjonsbevegelse. Er dette prograd eller retrograd bevegelse?

Bestem hva som kunne ha vært en passende verdi for parameteren n for at vår modell skal beskrive bevegelsen!

Er det forskjell på strømningene i de to tilfellene?