MEK1100 forelesning 13, 26/2–2024 ved Karsten Trulsen

Litt repetisjon:
La oss tenke oss at vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ er et hastighetsfelt, i så fall:

- Fluks ut av lukket flate, $\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$, forteller om tendens til utstrømning globalt
- Divergens, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$, forteller om tendens til utstrømning lokalt
- Sirkulasjon rundt lukket kurve, $\oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, forteller om tendens til rotasjon globalt
- Virvling, $\nabla\times\boldsymbol{v}$, forteller om tendens til rotasjon lokalt

Vi legger merke til at fluider deles inn i to hovedkategorier:

- Gasser endrer lett volum, hastighetsfeltet kan ha divergens ulik null, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}\neq 0$
- Væsker kan ikke komprimeres, hastighetsfeltet er divergensfritt, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, vi sier dette er et inkompressibelt felt

Dessuten forsøkte vi å generalisere terminologi fra astronomi, med hensyn til orienteringene til global og lokal tendens til rotasjon:

- Prograd betyr at de to rotasjonene er likt orientert
- Retrograd betyr at de to rotasjonene er motsatt orientert

Eksempel: Posisjonsvektor

En tre-dimensjonal posisjonsvektor $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ har divergens $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$ og er virvelfri $\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$.

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med vinkelhastighet oppover

La $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$. Hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$ er inkompressibelt $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, og har virvling

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\omega\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{\omega}$$

Vi kan regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel γ med radius r og med sentrum i origo, orientert i samme retning som feltet,

$$C=\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi r^2\omega=2A\omega>0$$

Vi legger altså merke til at både sirkulasjonen og virvlingens komponent i z-retning har samme fortegn.

Dette har en praktisk tolkning: Dersom vi står på en karusell så opplever vi egentlig to typer rotasjon samtidig: På den ene siden den globale bevegelsen rundt rotasjonsaksen til karusellen. På den andre siden den lokale rotasjonen rundt oss selv. Begge rotasjonsbevegelsene er orientert samme vei, følgelig kan vi si at rotasjonene er prograd.

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med generell vinkelhastighet

Nå generaliserer vi slik at vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$ kan peke i vilkårlig retning. Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Vi kan regne ut at hastighetsfeltet er divergensfritt (inkompressibelt)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\overset{\downarrow}{\boldsymbol{r}} \times \nabla) = \boldsymbol{\omega} \cdot (-\nabla \times \boldsymbol{r}) = 0$$

og vi skal vise at det har virvling

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) - \overset{\downarrow}{\boldsymbol{r}}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = 3\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\omega}$$

I utregningene ovenfor har vi benyttet at $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ og $\nabla \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, at skalarproduktet kommuterer $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$, at kryssproduktet oppfyller $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, at vektor-trippel-produkt oppfyller $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ og formelen for "dobbel-kryss-produktet" $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

Pila over $\boldsymbol{r}$ til venstre for ∇ indikerer at ∇ skal derivere til venstre. Det føles kanskje unaturlig at ∇ skal derivere til venstre? Grunnen til at dette fenomenet dukket opp var at vi brukte fomlene for vektor-trippel-produkt og dobbel-kryss-produkt blindt. Ettersom vi ønsker å unngå behov for å skrive slike piler, så skriver vi umiddelbart om rekkefølgen slik at ∇ får lov til å derivere til høyre.

Legg merke til at vi har

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}$$

og følgelig

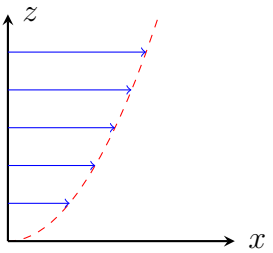
$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} = \omega_x \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\omega}$$

Derfor får vi til slutt resultatet

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

Eksempel: Vindprofil nær bakken

La xy-planet være bakken, la z-aksen peke oppover, og la vinden blåse i x-retning $\boldsymbol{v} = v_x(z)\boldsymbol{i}$. I figuren er $v_x(z)$ angitt med stiplet rød linje og $\boldsymbol{v}$ angitt med blå piler. Legg spesielt merke til at $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$, den horisontale hastigheten øker med økende avstand fra bakken.



Dette kalles en "skjærstrøm" (engelsk: "shear current") fordi fluid-partikler som ligger ved siden av hverandre (i z-retning) beveger seg i x-retning med forskjellig hastighet og vil derfor gni mot hverandre.

Det er fornuftig å anta at vinden oppfører seg slik nær bakken fordi den vil bremses på grunn av friksjon mot bakken.

Skjærstrømmen er er divergensfri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x(z)}{\partial x} = 0$$

følgelig er den inkompressibel, modellen kunne ha passet like godt for både væske og gass (vann og luft).

Skjærstrømmen har virvling

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \boldsymbol{j}$$

og ettersom vi vet at $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$ så ser vi at virvlingen er orientert i positiv y-retning.

Anta at en bevisstløs mygg lar seg frakte med denne vinden. Vil myggen ha en tendens til å rotere rundt seg selv?

Om vi kan betrakte hastighetsfeltet lokalt som en rotasjon som et stivt legeme, og om vi i tillegg kan anta at myggen vil bevege seg som en naturlig del av denne rotasjonen som et stivt legeme, så har vi resultatet fra forrige eksempel at vinkelhastighetsvektoren vil være $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z}\boldsymbol{j}$ som er orientert i positiv y-retning. Dersom denne betraktningen er fornuftig så kan det se ut til at myggen vil rotere rundt seg selv som om den skulle rulle bortover langs bakken, selv om den ikke er i kontakt med bakken.

Egentlig er problemet med å bestemme hvordan en bevisstløs mygg roterer rundt seg selv mer komplisert enn hva vi har skissert her, men eksemplet fungerer likevel for å illustrere tendensen til å rotere rundt seg selv på grunn av en skjærstrøm.