To viktige spesialtilfeller:

Divergensen til en virvling er null

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)=0\end{aligned}$$

Virvlinga til en gradient er null

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

Begge disse er lik null på betingelse av at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører derivasjonene. LH setning 2.5.2 sier at dersom de blandete deriverte eksisterer og er kontinuerlige så er de like. Vi skal anta at dette er oppfylt.

For de som er spesielt interessert tar vi med et par kommentarer her, men disse kommentarene (i kursiv) oppfatter vi som utenfor pensum i MEK1100:

En kommentar om rekkefølgen av blandete partiellderiverte

Både M kapittel 3.1.1 og LH kapittel 2.5 bruker samme notasjon for å angi blandete partiellderiverte, nemlig

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

og dette tolkes som at man først deriverer med hensyn på y og deretter med hensyn på x. Rekkefølgen går altså fra høyre mot venstre med hensyn til symbolene i nevneren.

Et eksempel på at ulik rekkefølge av partiellderiverte gir forskjellig svar

Det kan være lurt å ta en titt på LH kapittel 2.5 oppgave 4 for et eksempel på at ulik rekkefølge av blandete partiellderiverte kan gi forskjellig svar. Se på funksjonen

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{for } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Umiddelbart kan det virke som om rekkefølgen av partiellderiverte ikke spiller noen rolle da "rett fram" derivasjon gir samme svar for begge rekkefølger

$$g(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}\quad \text{for } (x,y)\neq(0,0)$$

Problemet er imidlertid hvordan vi skal tolke svaret i origo. Vi har nemlig

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0} g(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6} = 1$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{y\to 0} g(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^6}{y^6} = -1$$

Problemet er altså at den dobbeltderiverte av $f(x,y)$ gir et diskontinuerlig resultat i origo, og at det derfor spiller en rolle fra hvilken kant vi nærmer oss origo. Så lenge vi jobber med anvendelser av MEK1100 pleier vi å "elegant" se bort fra slike problemer...

Skalar- og vektorpotensial

Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ sier vi at ϕ er et skalarpotensial, eller bare potensial, til $\boldsymbol{v}$.

Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ sier vi at $\boldsymbol{A}$ er et vektorpotensial til $\boldsymbol{v}$.

De to viktige spesialtilfellene ovenfor viser at:

- Dersom et felt $\boldsymbol{v}$ kan uttrykkes ved et vektorpotensial, så er det divergensfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

- Dersom et felt $\boldsymbol{v}$ kan uttrykkes ved et (skalar)potensial, så er det virvelfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \implies \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

Det kan også vises at implikasjonene går andre vei, det vil si:

- Dersom et felt $\boldsymbol{v}$ er divergensfritt, $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$, så eksisterer det et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.
- Dersom et felt $\boldsymbol{v}$ er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, så eksisterer det et (skalar)potensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$.

Helmholtz teorem

Dersom et felt $\boldsymbol{v}$ er verken divergens- eller virvelfritt så kan man splitte feltet opp i en virvelfri og divergensfri del, og introdusere skalarpotensial og vektorpotensial for de respektive delene, dette kalles for Helmholtz teorem

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Nytteverdien av å introdusere potensialer

En åpenbar fordel ved å introdusere potensialer er at vi kan redusere antall ukjente som vi jobber med. Dersom et 3D felt $\boldsymbol{v}$ er virvelfritt så kan vi begrense oss til å jobbe med én skalar potensialfunksjon ϕ. Dersom et 2D eller 3D felt $\boldsymbol{v}$ er divergensfritt, kanskje vi kan nøye oss med kun én eller to komponententer i vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$.

Eksempel: Undersøk om tyngdekrafta $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ har et tyngdepotensial

La z-aksen peke oppover slik at $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$. Vi kan skrive tyngdekrafta ved hjelp av en gradient av et skalarpotensial

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -mg\boldsymbol{k} = -\nabla(mgz)$$

Husk at fysikere liker å sette minus-tegn foran gradienten til et potensial, derfor sier vi at tyngdepotensialet er

$$\phi = mgz + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Formelen sier at potensialet øker når vi øker høyden z. De som har hatt litt fysikk fra før vil gjenkjenne dette potensialet som potensiell energi i tyngdefeltet.

Eksempel: Undersøk om tyngdekrafta i Newtons gravitasjonslov har et tyngdepotensial

Nok en gang kan vi skrive tyngdekrafta ved hjelp av en gradient av et skalarpotensial

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{i}_r = -\nabla\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

Nok en gang har vi satt minus-tegn foran gradienten fordi det er slik fysikerne liker det, derfor skriver vi tyngdepotensialet

$$\phi = -\frac{GMm}{r} + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Sjekk at formelen impliserer at potensialet øker når avstanden øker!

I dette tilfellet fikk vi en hyperbel, mens i forrige eksempel fikk vi ei rett linje. Disse er relatert til hverandre fordi den rette linja i forrige eksempel er tangent til hyperbelen i et gitt punkt!

Siden tyngdekrafta er gradienten til et skalarpotensial så vet vi at den er virvelfri.

Strømfunksjon

La oss anta at vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ er 2D og divergensfritt, nemlig

$$\boldsymbol{v} = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

og

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Vi kan da introdusere en såkalt "strømfunksjon" $\psi(x,y)$ med

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Det er opplagt at feltet er divergensfritt.

Ekvivalent kunne vi ha introdusert vektorpotensialet $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{k}\psi$ og skrevet vektorfeltet som

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (-\boldsymbol{k}\psi) = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{j}$$

Vi ser umiddelbart at vektorfeltet da blir divergensfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

La oss nå finne strømlinjene. Husk at strømlinjer er kurver som er overalt tangent til vektorfeltet, dette uttrykker vi ved

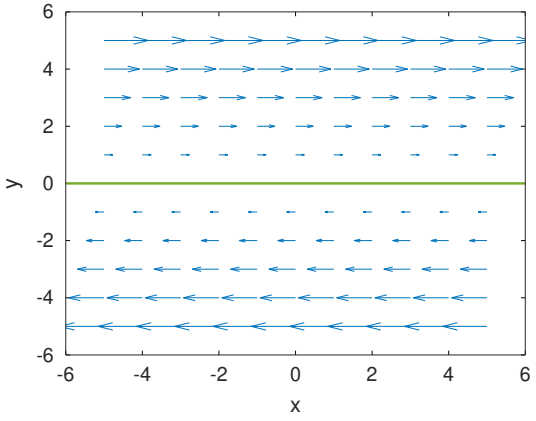
$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{k} \times \nabla\psi) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla\psi(\boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{k}(\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}) = \nabla\psi\,\mathrm{d}z - \boldsymbol{k}(\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r})$$

Legg merke til at $\nabla\psi$ ikke har noen komponent i z-retning, derfor er først ledd vinkelrett på z-aksen mens andre ledd er langs z-aksen. Vi gjenkjenner også $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\psi$ som et fullstendig differensial. Det følger at vi må oppfylle de to kravene $\mathrm{d}z = 0$ og $\mathrm{d}\psi = 0$ som viser at strømlinjene er gitt ved $\psi =$ konstant og $z =$ konstant.

Dersom strømfunksjonen ψ eksisterer så er altså strømlinjene gitt som ekviskalarlinjene $\psi =$ konstant. Dette kan for eksempel plottes på datamaskin ved hjelp av en `contour`-kommando.

Husk at strømfunksjonen ikke alltid eksisterer! I så fall må vi gå tilbake til den opprinnelige differensiallikninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Eksempel: Finn strømlinjene og strømfunksjonen til feltet $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$



Vi ser at dette er en skjærstrøm.

I dette tilfellet er divergensen er lik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, derfor vet vi at en strømfunksjon eksisterer. Vi finner $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$. Strømlinjene er linjer parallelle med x-aksen.