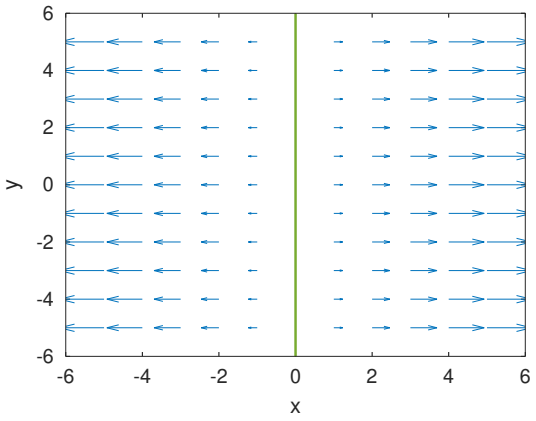
MEK1100 forelesning 15, 4/3–2024 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Finn strømlinjene og strømfunksjonen til feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$



Forsøk på å finne en strømfunksjon ψ leder til en selvimotsigelse. Dette skyldes at divergensen er ulik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$. Følgelig vet vi at strømfunksjonen ikke eksisterer. Vi kan likevel finne strømlinjene ved å løse $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi finner da rette linjer parallelle med x-aksen.

Merk at strømlinjene er de samme som i forrige eksempel, men kun vektorfeltet i det siste eksemplet har en strømfunksjon. Det er altså ikke tilstrekkelig å identifisere strømlinjene for å entydig identifisere et vektorfelt.

Strømrør

Et "rør" som har vegger som er strømlinjer. Dette kan vi både tenke oss i tredimensjonalt rom som et vanlig rør, og vi kan tenke oss plan strøm (typisk xy-planet) hvor "veggene" i "røret" er kurver i planet. Det er åpenbart at det ikke vil strømme igjennom veggene til et strømrør.

I de to eksemplene ovenfor har vi identiske strømrør, begge for plan strøm i xy-planet med vegger parallelle med x-aksen.

Fluks av todimensjonal strøm gjennom strømrør

La oss regne ut den integrerte fluksen gjennom et strømrør for et vektorfelt i xy-planet, $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$, hvor kurven γ ligger i xy-planet og krysser strømrøret fra et punkt A på den ene siden til et punkt B på den andre siden.

Merk: Dette er integrert fluks for en plan strømning gjennom en kurve i planet. Derfor benytter vi $\mathrm{d}s$ som er et infinitesimalt kurveelement og ikke et infinitesimalt flateelement.

Vi har $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \pm\boldsymbol{k} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm(-\boldsymbol{i}\mathrm{d}y + \boldsymbol{j}\mathrm{d}x)$. La oss anta at $\boldsymbol{n}$ skal peke i positiv x-retning, så vi velger $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{i}\mathrm{d}y - \boldsymbol{j}\mathrm{d}x$. Den integrerte fluksen gjennom kurven γ blir da $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x$. Nå kommer vi ikke lenger uten å gjøre flere antakelser.

La oss anta at feltet har en strømfunksjon, i så fall får vi

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma -\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x = -\int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_A - \psi_B.$$

Dette følger av at integranden er et fullstendig differensial. I dette tilfellet er resultatet uavhengig av integrasjonsveien, så vi trenger kun å vite endepunktene A og B. Egentlig er resultatet også uavhengig av hvor endepunktene A og B befinner seg fordi strømfunksjonen er konstant langs hver av veggene. Resultatet sier altså at den integrerte fluksen er konstant i alle tverrsnitt!

Merk: Dersom strømfunksjonen eksisterer er den integrerte fluksen i et strømrør gitt ved differansen i strømfunksjonen mellom de to sidene. Da er den integrerte fluksen konstant over alle tverrsnitt γ. Dersom strømfunksjonen ikke eksisterer må vi regne med at den integrerte fluksen i et strømrør avhenger av tverrsnittet γ.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$

Vi har tidligere sett at det eksisterer en strømfunksjon $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$. Strømlinjene er de rette linjene $y =$ konstant. Dersom vi betrakter et strømrør med vegger $y = A$ og $y = B$ så vil den integrerte fluksen være

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \psi_A - \psi_B = \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}A^2$$

Vi kunne også ha regnet dette ut direkte, uten bruk av strømfunksjon,

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_A^B y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}A^2$$

Legg merke til at den integrerte fluksen i strømrøret er konstant for alle tverrsnitt.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$

Vi har sett at det ikke eksisterer noen strømfunksjon. Vi regner derfor ut direkte

$$\int_A^B \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_A^B x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\,\mathrm{d}y = xy|_{y=A}^B = x(B-A)$$

Legg merke til at nå er den integrerte fluksen avhengig av x-koordinaten til tverrsnittet!

Trykkraft, hydrostatisk trykk, oppdrift, Arkimedes prinsipp

Trykk p er kraft per flate. Vanlig enhet for trykk er Pascal, vanlig enhet for kraft er Newton, og vi har Pascal = Newton/m^2, eller Pa = N/m^2.

Trykk er *isotropt*, det vil si at det virker likt i alle retninger.

Trykkraft virker normalt på et flateelement. Vi har en konvensjon som sier at normalvektor $\boldsymbol{n}$ til et flateelement peker ut fra det vi betrakter. Det betyr at trykkraften på flateelementet må peke i retning $-\boldsymbol{n}$.

Trykkraften som virker på et infinitesimalt flateelement $\mathrm{d}\sigma$ blir således

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

og trykkraft integrert over en flate S blir

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor S er flaten (som omslutter et legeme), $\boldsymbol{n}$ er enhets normalvektor som peker ut fra flaten (eller legemet), og p er trykket utenfor flaten (ellersom omgir legemet).

Formelen for hydrostatisk trykk er

$$p = p_0 - \rho g z$$

hvor z er den vertikale koordinaten, minustegnet viser at z-aksen peker oppover, g er tyngdens akselerasjon, ρ er tettheten til væska, og p_0 er et referansetrykk ved $z = 0$. Denne formelen kan brukes dersom fluidet står i ro og tettheten er konstant og z-aksen peker opp.

Eksempel: Total vertikal trykkraft som virker på bunnen av et kar delvis fylt med vann

La z-aksen peke opp, la $z = 0$ i vannoverflaten, la lufttrykket være p_0, la vannet stå i en høyde h i karet, og la karet ha et konstant horisontalt tverrsnitt A.

Vannet like over bunnen har trykk $p = p_0 + \rho g h$. Her vil enhetsnormalvektor peke opp $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Trykkraften som virker ovenfra vil være

$$\boldsymbol{F}_{\text{over}} = -(p_0 + \rho g h)\boldsymbol{k}A$$

Lufta like under bunnen har trykk $p = p_0$. Her vil enhetsnormalvektor peke ned $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$. Trykkraften som virker nedenfra vil være

$$\boldsymbol{F}_{\text{under}} = -p_0(-\boldsymbol{k})A$$

Summen av disse er

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{over}} + \boldsymbol{F}_{\text{under}} = -\rho g h \boldsymbol{k} A$$

Dersom vi identifiserer volumet av vannet $V = hA$ og tyngdens akselerasjon , $g = -g\boldsymbol{k}$ så ser vi at $\boldsymbol{F} = \rho V \boldsymbol{g} = m\boldsymbol{g}$, hvor m er massen til vannet. Vi ser altså at trykkraften på bunnen av karet er lik tyngden til vannet.

Eksempel: Oppdrift på en beholder som presses ned i et kar med vann

La z-aksen peke opp, la $z = 0$ i vannoverflaten, la lufttrykket være p_0, la beholderen være presset ned i vannet til en dybde h, og la beholderen ha et konstant horisontalt tverrsnitt A.

Vannet like under bunnen av beholderen har trykk $p = p_0 + \rho g h$. Her vil enhetsnormalvektor peke ned $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$. Trykkraften som virker nedenfra vil være

$$\boldsymbol{F}_{\text{under}} = -(p_0 + \rho g h)(-\boldsymbol{k})A$$

Lufta like over beholderen har trykk $p = p_0$. Her vil enhetsnormalvektor peke opp $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Trykkraften som virker ovenfra vil være

$$\boldsymbol{F}_{\text{over}} = -p_0 \boldsymbol{k} A$$

Summen av disse er

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{over}} + \boldsymbol{F}_{\text{under}} = \rho g h \boldsymbol{k} A$$

Dersom vi identifiserer volumet av det fortrengte vannet $V = hA$ og tyngdens akselerasjon , $g = -g\boldsymbol{k}$ så ser vi at $\boldsymbol{F} = -\rho V \boldsymbol{g} = -m\boldsymbol{g}$, hvor m er massen til det fortrengte vannet. Vi ser altså at oppdriften på beholderen lik det motsatte av tyngden til det fortrengte vannet.

Dette er Arkimedes prinsipp (han levde fra 287 til 212 før vår tidsregning).