MEK1100 forelesning 16, 6/3–2019 ved Karsten Trulsen

## Gauss integralsats

M 5.1. GF 7.4. LH 6.14.

Vi har tidligere sett at divergensen til et vektorfelt kan uttrykkes som

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

Her er $S$ en lukket flate som omslutter et volum $V$. Flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er rettet ut fra volumet. Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til et volum $V$ av endelig størrelse, omsluttet av en lukket flate $S$. Dette kan vi få til ved å dele opp det opprinnelige volumet i mange små biter $V_m$ som er omsluttet av flater $S_m$. Så kan vi summere opp bidraget over alle bitene. La oss fjerne grenseverdien midlertidig, og la oss multiplisere med volumet, og ta summen

$$\sum_m \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,V_m \approx \sum_m \int_{S_m}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

I grensen at bitene blir infinitesimalt små, vil $V_m$ bli infinitesimale volumelementer $\mathrm{d}\tau$, og summen på venstre side over alle volumene kan uttrykkes som et integral. Der hvor to delflater $S_m$ møtes vil fluksintegralene kansellere hverandre ut, de vil gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn fordi flatenormalvektorene $\boldsymbol{n}$ peker i motsatt retning. Dermed vil summen på høyre side over alle flateintegralene bli lik integralet over yttergrensen $S$.

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{3}$$

Dette er Gauss sats.

**NB! Obs!** Vi må passe oss for singulariteter i integrasjonsområdene! Om for eksempel divergensen $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ er singulær i et punkt så må vi ekskludere det punktet fra integrasjonsområdet $V$ (*med mindre vi aksepterer å utvide funksjonsbegrepet vårt slik at vi er i stand til å representere singulariteten på et vis*).

**Eksempel: Integrert fluks av $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ut av enhetsterning**

La de seks sidene være $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ og $z = 1$. De seks tilhørende enhets normalvektorene er henholdsvis $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Det er fluks gjennom kun én av sidene, nemlig $x = 1$ som har enhets normalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$. Fluksintegralet er lik 1.

Gauss sats gjør det mulig å la være å regne ut fluksintegralet eksplisitt, men heller regne ut volumintegralet av divergensen. Divergensen er $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 1$. Volumintegralet av divergensen er derfor lik volumet av enhetskuben, som er lik 1.

**Eksempel: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $V$ kule med radius $R$ rundt origo**

Divergensen til $\boldsymbol{v}$ er $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 3$. Volumintegralet er derfor lik 3 ganger volumet av kula, $3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$.

Vi kan uttrykke $\boldsymbol{v}$ som $\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{i}_r$ hvor $r = |\boldsymbol{r}|$.

For et kuleskall med radius $r = R$ sentrert rundt origo innser vi at enhetsnormalvektor er $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{i}_r$. På kuleskallet har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = R\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_r = R$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er lik $R$ ganger arealet til kuleskallet, $R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$.

**Eksempel: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $V$ kule med radius $R$ ikke rundt origo**

Divergensen er stadig $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 3$. Følgelig ser vi at volumintegralet er lik 3 ganger volumet til kula, $3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$, uansett hvor kula er sentrert.

Flateintegralet vil i dette tilfellet være mye vanskeligere å regne ut. For et kuleskall med radius $R$ sentrert rundt $\boldsymbol{r}_0$ vil enhetsnormalvektor være $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$, og vi får $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ som ikke umiddelbart ser ut til å være enkelt å integrere over kuleskallet.

Gauss sats omformet et vanskelig flateintegral til et enkelt volumintegral!

**Eksempel: Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov**

La

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}_r}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

og la $V$ være ei kule med radius $R$ med sentrum i origo.

Vi kan regne ut at feltet er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ for $r \neq 0$, men betyr det at volumintegralet av divergensen er lik 0?

Pass på! Vilkårlig nær origo peker $\boldsymbol{v}$ vilkårlig sterkt i alle retninger!

På kuleskallet $r = R$ har vi $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{i}_r$ og derfor $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{R^2}$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er positivt og lik $4\pi$ fordi arealet til kuleskallet er $4\pi R^2$, nemlig $\frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$.

Kan dette stemme med Gauss sats?

Problemet er at divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ har en vesentlig singularitet i origo. Singulariteten er vesentlig i den forstand at den påvirker volumintegralet til tross for at singulariteten er begrenset til ett enkelt punkt. Det er to strategier for å håndtere en slik singularitet:

Den enkleste måten å unngå problemer med singulariteter er å ekskludere de singulære punktene fra integrasjonsområdet. Dette er strategien i MEK1100 og i de tre lærebøkene M, GF og LH.

En alternativ måte er å representere singularitetene på riktig måte slik at vi kan integrere over dem. Dette medfører å utvide funksjonsbegrepet til såkalte "generaliserte funksjoner" eller "distribusjoner" og benytte såkalt "svak formulering". Vi skal vise et eksempel nedenfor.

Først viser vi hvordan problemet kan løses ved å ekskludere singulariteten:

**Eksempel: Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov, ekskludert det singulære punktet i origo**

Vi unngår problemet med singularitet i origo ved å ekskluderer origo fra $V$. Dette gjør vi ved å legge inn et lite kuleskall rundt origo, med radius $\epsilon$. Volumet $V$ skal være området $\epsilon \leq r \leq R$, avgrenset av to kuleskall, et ytre skall $r = R$ og et indre skall $r = \epsilon$.

Volumintegralet er nå uproblematisk siden $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, uten singulariteter i $V$, så volumintegralet er lik null.

Flateintegralet får nå bidrag fra to flater, ytre og indre kuleskall. Integralet over det ytre kuleskallet er det samme som før $4\pi$. På det indre kuleskallet har vi $\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = -\boldsymbol{i}_r$ og derfor $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{1}{R^2}$, følgelig er fluksintegralet negativt og lik $-4\pi$. Summen av de to flateintegralene er null, og Gauss sats er oppfylt.

For de som er spesielt interessert tar vi med et et eksempel på hvordan vi kan representere en singularitet ved svak formulering og generalisert funksjon. Disse kommentarene (i kursiv) oppfatter vi som utenfor pensum i MEK1100:

---

## *Litt om svak formulering og generaliserte funksjoner for å representere vesentlige singulariteter*

*Vi skal betrakte den deriverte av fortegnsfunksjonen*

$$f(x) = sign\, x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & for\ x < 0 \\ c & for\ x = 0 \\ 1 & for\ x > 0 \end{cases}$$

*hvor $c$ i prinsippet kan ha hvilken som helst endelig verdi. Det som er viktig er at $f(x)$ har en diskontinuitet på 2 fra negative til positive $x$. Den deriverte er*

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} 0 & for\ x \neq 0 \\ \text{“}\infty\text{”} & for\ x = 0 \end{cases}$$

*Vi ønsker å finne ut hvordan denne uendelige verdien i origo oppfører seg under et integral. Vi introduserer da en testfunksjon $g(x)$ som har følgende to egenskaper:*

- *$g(x)$ er uendelig glatt. Det vil si at både $g(x)$ og alle høyere deriverte av $g(x)$ er glatte. Ingen derivert av $g(x)$ har noen singularitet.*
- *$g(x)$ har kompakt støtte. Det vil si at $g(x)$ er identisk lik null utenfor et endelig område.*

*Betrakt nå integralet*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

*Vi kunne ha vært fristet til å si at dette integralet var lik null, men vi skal være mer forsiktig med den vesentlige singulariten til $f'(x)$ i origo. Vi benytter derfor delvis integrasjon for å omforme integralet slik at vi ikke trenger å derivere $f(x)$.*

*Vi har*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg'$$

*og derfor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

*Ettersom $g(x)$ har kompakt støtte så er $[f(x)g(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0$. Videre kan vi splitte opp integralet på høyre side slik at vi unngår diskontinuiteten til $f(x)$, det går greit fordi verdien $f(0) = c$ er endelig,*

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} g'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[g(x)\right]_{0}^{\infty} + \left[g(x)\right]_{-\infty}^{0} = 2g(0)$$

*hvor vi nok en gang har benyttet at $g(x)$ har kompakt støtte.*

*Vi ser altså at $f'(x)$ sin vesentlige singularitet i origo er av en slik art at effekten på testfunksjonen er å returnere 2 ganger testfunksjonens verdi i origo. Tallet 2 kommer fra diskontinuiteten til $f(x)$, fra negative til positive $x$, som har sprang 2.*

*Det er vanlig å skrive*

$$f'(x) = 2\delta(x)$$

*hvor $\delta(x)$ kalles Dirac delta.*

*Etter at vi har introdusert kulekoordinater kommer vi til å forstå at singulariteten i eksemplet ovenfor også kan uttrykkes ved Dirac delta, nemlig*

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

*I så fall hadde det ikke vært nødvendig å introdusere det indre kuleskallet med liten radius $r = \epsilon$, men det må altså vente til vi har introdusert kulekoordinater.*

---

## Modifisert form for Gauss sats som egner seg for trykkraft

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}$ hvor $p$ er en skalar funksjon og hvor $\boldsymbol{a}$ er en vilkårlig konstant vektor. Divergensen er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (p\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla p$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats, og setter "$\boldsymbol{a}\cdot$" utenfor integraltegnet (fordi den er konstant) så får vi

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_V \nabla p\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \cdot \int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Ettersom $\boldsymbol{a}$ er vilkårlig så ender vi opp med følgende alternative form for Gauss sats som egner seg spesielt godt for å regne ut trykkraft

$$\int_V \nabla p\,\mathrm{d}\tau = \int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Flateintegralet for trykkraften $\boldsymbol{F}$ som virker på et legme på grunn av et omkringliggende trykk $p$ kan nå omformes til et volumintegral

$$\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\int_V \nabla p\,\mathrm{d}\tau$$

Dette kan være en stor fordel dersom legemet har en komplisert form slik at beskrivelsen av både $S$ og $\boldsymbol{n}$ er utfordrende. Kanskje det er enklere å regne ut volumintegralet?

**Eksempel: Tyngden av vann i en beholder er lik trykkraften fra vannet på beholderen**

En beholder er fylt med en væske som har hydrostatisk trykk, $p = p_0 - \rho g z$. Vi tenker oss at $z$-aksen peker oppover og tyngdens akselerasjon er $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$. Vi tenker oss videre at referansetrykket $p_0$ er lik lufttrykket, referansehøyden $z = 0$ er den frie overflaten til væsken der hvor væsken møter lufttrykket $p_0$, og beholderen er omgitt av luft med trykk $p_0$. Trykkgradienten i væsken er $\nabla p = -\rho g\boldsymbol{k} = \rho\boldsymbol{g}$. Væskevolumet $V$ er omsluttet av overflaten $S$ som har enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n}$ orientert ut av flaska.

I dette tilfellet vil trykkraften fra væsken på beholderen være

$$\boldsymbol{F} = \int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\int_V \rho g\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\tau = -mg\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{g}$$

hvor $m = \rho V$ er massen til væsken og $m\boldsymbol{g}$ er vekten av væsken. Volumintegralet er mye enklere å regne ut dersom væsken har et kjent volum og beholderen har en komplisert form.

Egentlig kan vi lure på hvordan dette fungerer dersom beholderen er åpen i toppen hvor væsken er i kontakt med omkringliggende luft med lufttrykk $p_0$. I så fall må vi utvide flateintegralet for å ta hensyn til trykkraft fra omkringliggende luft med konstant lufttrykk $p_0$ (husk å snu $\boldsymbol{n}$ for trykkraft fra utsiden) og resultatet ovenfor er stadig riktig.

**Eksempel: Oppdrift på et legeme som presses ned i vann**

Et legeme presses ned i vann med hydrostatisk trykk, $p = p_0 - \rho g z$. Vi tenker oss at $z$-aksen peker oppover og tyngdens akselerasjon er $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$. Vi tenker oss videre at referansetrykket $p_0$ er lik lufttrykket, referansehøyden $z = 0$ er den frie overflaten til væsken der hvor væsken møter lufttrykket $p_0$. Trykkgradienten i væsken er $\nabla p = -\rho g\boldsymbol{k} = \rho\boldsymbol{g}$. Volumet $V$ av legemet som er presset ned i vannet er omsluttet av overflaten $S$ som har enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n}$ orientert ut av legemet.

I dette tilfellet vil trykkraften fra vannet på legemet være

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_V \rho g\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}\tau = mg\boldsymbol{k} = -m\boldsymbol{g}$$

hvor $m = \rho V$ er massen til det fortrengte væsken og $m\boldsymbol{g}$ er vekten av den fortrengte væsken. Dette kalles oppdrift. Oppdriften er motsatt like stor som vekten til den fortrengte væsken. Dette kalles for Arkimedes prinsipp.

Egentlig burde vi stusse over at denne måten å bruke Gauss sats på er riktig: Trykket $p$ som inngår i flateintegralet er en egenskap til fluidet rundt legemet, men vi har beregnet volumintegralet over legemet hvor det ikke trenger å være et fluid, og som ikke trenger å ha tetthet eller trykk tilsvarende fluidet omkring. Det vi har gjort er å erstatte legemet med et fluid identisk med omgivelsene slik at det hydrostatiske trykket kan forlenges inn i legemet. Denne måten å løse oppdriftsproblemet på ble først beskrevet av Simon Stevin (1548–1620).

**Eksempel: Hvor kommer oppdriften egentlig fra?**

Sett en beholder med vann på en vekt. Press et legeme ned i vannet. Kjenn at det virker en oppdrift på legemet. Observer at vekta faktisk gir større utslag!

**Eksempel: Vannsøyle i deformert beholder på kjøkkenvekt**

Fyll en beholder med litt vann, sett beholderen på en vekt, og finn ut hvor mye vannet veier. La oss tenke oss at beholderen er åpen øverst slik at vannet der har samme trykk som luft, $p_0$. Vannet nederst i beholderen er gitt ved formelen for hydrostatisk trykk, $p = p_0 + \rho g h$, hvor $h$ er høyden på vannsøylen.

Klem beholderen delvis sammen slik at vannet stiger i beholderen. Det er åpenbart at vannet nå har større trykk nederst i beholderen. Likevel burde det være ganske opplagt at vannet veier like mye som før?

Forklaringen på dette "mysteriet" er at den sammenklemte beholderen kommer til å ha en svært deformert og komplisert overflate $S$ som det vil være utfordrende å integrere over. Dog vil volumet av vannet hele tiden være det samme.