MEK1100 forelesning 17, 11/3–2024 ved Karsten Trulsen

Gauss integralsats

Forrige gang utledet vi Gauss integralsats

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

Vi utledet også en modifisert versjon av Gauss integralsats ved å sette $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}p$ hvor $\boldsymbol{a}$ er en vilkårlig konstant vektor og p er et skalarfelt

$$\int_V \nabla p \, \mathrm{d}\tau = \int_S p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

Denne egner seg spesielt godt til å beregne trykkraft. Ved hjelp av denne viste vi at trykkraften på en beholder, fra ei væske i beholderen, er lik vekten av væska i beholderen. Vi viste også at oppdriften på et legeme som senkes ned i ei væske er motsatt lik vekten av den fortrengte væska (Arkimedes prinsipp).

Eksempel: Vis at for enhver lukke flate S så er

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Ved å benytte Gauss sats kan vi skrive om til et volumintegral

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\tau = 0$$

Fordi vi har tidligere vist at divergensen til en virvling er lik null $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$.

Andre modifiserte versjoner av Gauss sats

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$ hvor $\boldsymbol{u}$ er et vektorfelt som er en funksjon av posisjon og hvor $\boldsymbol{a}$ er en vilkårlig konstant vektor. Divergensen er (husk at kun $\boldsymbol{u}$ skal deriveres)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}) = \nabla \cdot (-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u})$$

Vi har også

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats, og setter "$\boldsymbol{a}\cdot$" utenfor integraltegnet fordi det er en konstant vektor, så får vi

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_V -\nabla \times \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \cdot \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

men siden $\boldsymbol{a}$ er vilkårlig så ender vi opp med følgende alternative form for Gauss sats

$$\int_V -\nabla \times \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

Green's første identitet

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = f\nabla g$ hvor f og g er to skalarfelt. Divergensen er (husk at både f og g skal deriveres, så vi bruker produktregelen)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats får vi

$$\int_V \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \,\mathrm{d}\tau = \int_S f\nabla g \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma$$

Green's andre identitet

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = f\nabla g - g\nabla f$ hvor f og g er to skalarfelt. Divergensen er (husk at både f og g skal deriveres, så vi bruker produktregelen)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats får vi

$$\int_V f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \,\mathrm{d}\tau = \int_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma$$

(Resten av tiden ble brukt til å regne midtveiseksamen 2023, oppgaver 1–7.)