MEK1100 forelesning 18, 13/3–2024 ved Karsten Trulsen

## Stokes integralsats

M 5.2. GF 7.3. LH 6.15.

Vi har tidligere sett at komponenten i retning $\boldsymbol{n}$ av virvlinga til et vektorfelt $\boldsymbol{n}$ kan uttrykkes som

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=\lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Her er $\gamma$ en lukket kurve som omslutter en åpen flate $S$ med areal $A$. At flaten $S$ er åpen betyr at den ikke omslutter et volum, men er avgrenset av den lukkede kurven $\gamma$. Flaten $S$ har en flatenormalvektor $\boldsymbol{n}$ som er orientert i overensstemmelse med retningen rundt $\gamma$ i henhold til høyrehåndsregelen. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt en lukket kurve i grensen at kurven skrumper inn til et punkt.

Merk at før vi gjennomfører grenseoppgangen så trenger ikke flaten $S$ å være plan, og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ trenger følgelig ikke å være konstant, men etter grenseoppgangen forholder vi oss kun til en entydig flatenormalvektor $\boldsymbol{n}$.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til en endelig stor flate $S$, omsluttet av en lukket kurve $\gamma$, som ikke lenger skal skrumpe inn til et punkt. Dette kan vi få til ved å dele opp den opprinnelige flaten i mange små biter $S_m$ som er omsluttet av kurver $\gamma_m$. Så kan vi summere opp bidragene fra alle bitene. La oss fjerne grenseverdien midlertidig, og la oss multiplisere opp arealet, og ta summen

$$\sum_m \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\,A_m\approx\sum_m\oint_{\gamma_m}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Vi merker oss at i grensen av at bitene blir infinitesimalt små, så vil $A_m$ bli infinitesimale flateelementer $\mathrm{d}\sigma$, og summen over alle flatene kan uttrykkes som et integral. Videre merker vi oss at der hvor to delkurver $\gamma_m$ møtes så vil fluksintegralene gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn fordi kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ peker i motsatt retning. Derved vil summen over alle kurvintegralene bli lik integralet over den yttre kurven $\gamma$

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_\gamma\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\tag{1}$$

Dette er Stokes sats.

**NB! Obs!** Vi må passe oss for singulariteter i integrasjonsområdene! Om for eksempel virvlinga $\nabla\times\boldsymbol{v}$ er singulær i et punkt så må vi ekskludere det punktet fra integrasjonsområdet $S$ (*med mindre vi aksepterer å utvide funksjonsbegrepet vårt slik at vi er i stand til å representere singulariteten på et vis*).

### Eksempel: Sirkulasjonen til rotasjon som stivt legeme

La $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ hvor $\boldsymbol{r}$ er posisjonsvektor og $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelhastighet for en rotasjon som stivt legeme. Vi har tidligere regnet ut at virvlingen er $\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$.

Dersom vi nå lar $S$ være en plan flate med konstant enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n}$, avgrenset av en lukket kurve $\gamma$, og vi lar arealet til $S$ være $A$, så har vi sirkulasjonen

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}A$$

Sjekk for eksempel hvordan dette blir dersom $S$ er en sirkelskive for $z = 0$ med radius $R$, og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, og $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$.

## Regning med del-operatoren

Formlene i Rottmann side 64, som også finnes i M side 81–82, kan nå med fordel utforskes.

NB! Notasjonen til Rottman er svært forskjellig fra den vi er vant til! Det kan være ganske forvirrende!

Ved hjelp av produktregelen for derivasjon, og regelen

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

og regelen

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

og at skalarproduktet er kommutativt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ og at kryssproduktet er antikommutativt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, kan vi nå utlede følgende formler som står både i M side 81–82 og i Rottmann side 64:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla^2\boldsymbol{u}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f\nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\nabla \times (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \times \boldsymbol{u} + f\nabla \times \boldsymbol{u}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} - (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$$

$$\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{u}$$

### Litt om dyadiske produkter

Vi noterer dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$. Dette er i overensstemmelse med M og GF. Andre bruker symbolet $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ som i praksis betyr det samme. Rottmann har ingen notasjon for dette produktet.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom $\alpha$ og $\beta$ og $\gamma$ er skalarer, og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c}) = \alpha\gamma\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} + \beta\gamma\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$.

Generelt har vi at et dyadisk produkt ikke kommuterer $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats

dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut dette uttrykket som $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

**Advarsel!**

Vi skal her gå ut ifra at vi kan bytte ut hvilken som helst av vektorene med $\nabla$ og at uttrykket stadig har samme mening, for eksempel

$$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{c}$$

Dette er i overensstemmelse med M og GF, men er dessverre ikke i henhold til enkelte andre. Vær derfor forberedt på at uttrykket $\nabla \boldsymbol{c}$ av noen kan tolkes med motsatt rekkefølge enn hva som gjøres her og i M og i GF. For å unngå denne tvetydigheten kan det være tryggest å sette parentes $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{c}$. Dette er også rekkefølgen som medfører mist anstrengelse for praktisk utregning.