MEK1100 forelesning 19, 3/4–2024 ved Karsten Trulsen

Stokes integralsats

Forrige gang utledet vi Stokes sats

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

Nå skal vi se noen eksempler på hva vi kan bruke den til:

Konservativt felt

Vi har tidligere diskutert at det er fire måter å karakterisere et konservativt felt. $\boldsymbol{F}$ er et konservativt felt dersom:

(I) Sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en vilkårlig lukket kurve γ.

(II) Kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) Det eksisterer et skalarfelt ϕ slik at $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial. NB! Fysikere liker å skrive $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$.

(IV) Feltet er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

Vi har tidligere vist at $(I) \iff (II) \iff (III)$. Vi har også vist at $(III) \implies (IV)$. Det gjenstår å vise at $(IV) \implies (I)$, dette lar seg nå lett vise ved hjelp av Stokes sats, for dersom feltet er virvelfritt så ser vi umiddelbart at sirkulasjonen er null

Greens integralsats er et spesialtilfelle av Stokes integralsats

La S være et område i xy-planet avgrenset av en lukket kurve γ, og la $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Vi kan skrive $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y$ langs γ, og $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ i S.

La $\boldsymbol{v} = F(x,y)\boldsymbol{i} + G(x,y)\boldsymbol{j}$. Vi kan regne ut $\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

Dersom vi setter dette inn i Stokes sats (1) får vi Greens sats

$$\iint_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\gamma F \, \mathrm{d}x + G \, \mathrm{d}y$$

Eksempel: Stokes sats anvendt på modell for strømningen nær sluket i en vask

Hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

kan tjene som én mulig modell for strømningen nær sluket i en vask.

Vi har tidligere regnet ut at hastighetsfeltet er virvelfritt $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ utenom origo. I origo har vi derimot et singulært punkt hvor hastigheten er uendelig stor i alle retninger.

Vi kan lett regne ut høyre side i Stokes sats (1). Sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo og med radius R er 2π uavhengig av radius R.

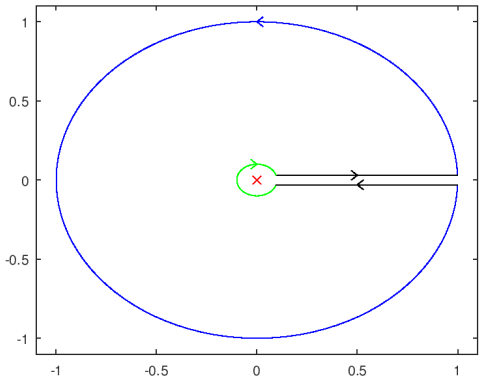
Vi kan også lett regne ut venstre side i Stokes sats (1) så lenge vi unngår å inkludere det singulære punktet i integrasjonsområdet. Flateintegralet av virvlingen er i så fall null.

Stokes sats ser derimot ut til å være ugyldig dersom vi prøver å inkludere det singulære punktet i integrasjonsområdet, 2π er ikke lik 0.

Det er to måter å løse utfordringen med en slike singulariteter. Enten må vi ekskludere det singulære punktet fra integrasjonsområdet S, eller så må vi utvide funksjonsbegrepet slik at vi blir i stand til å representere singulariteten på et vis. Vi velger å ekskludere singulariteten.

Eksempel: Dersom det singulære punktet i origo ekskluderes fra integrasjonsområdet så er Stokes sats (1) igjen oppfylt

Kurven γ utvides med en liten omvei for å unngå singulære punktet som er markert med et rødt kryss i figuren.



Den blå kurven ytterst vil gi bidrag 2π, den grønne kurven innerst vil gi bidrag -2π, mens de to svarte kurvene kansellerer hverandre ut fordi de representerer samme kurve fram og tilbake. Summen av bidragene til sirkulasjonsintegralet blir null, og Stokes sats (1) er oppfylt.

Eksempel: Bruk Stokes sats (1) til å vise at for enhver lukket flate S er den integrerte fluksen av virvling lik null

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Dette ble vist i forrige forelesning ved hjelp av Gauss sats, altså ved overgang til et volumintegral. Nå skal vi derimot vise det samme ved hjelp av Stokes sats, altså ved overgang til kuveintegral.

Legg merke til at flaten som inngår i Stokes sats skal være åpen, mens flaten som inngår i denne oppgaven er lukket. Vi kan "åpne" den lukkede flaten ved å dele den

i to deler, som begge er avgrenset av den samme lukkede kurven γ. Avgrensningskurven har motsatt orientering for de to delene. Bidraget fra de to kurveintegralene vil derfor kansellere hverandre ut, og vi har vist resultatet.

Eksempel: Variant av Stokes sats (M 5.2.2)
Sett $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}f$ for en vilkårlig konstant vektor $\boldsymbol{a}$ og et skalarfelt f. Vi har

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{a}f) = -\boldsymbol{a} \times \nabla f$$

Etter litt manipulering, og ettersom $\boldsymbol{a}$ er konstant slik at den kan settes utenfor integralene, får vi

$$\boldsymbol{a} \cdot \left(\int_S -\nabla f \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \right) = \boldsymbol{a} \cdot \oint_\gamma f \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Ettersom $\boldsymbol{a}$ er vilkårlig har vi

$$\int_S -\nabla f \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \oint_\gamma f \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Eksempel: Enda en variant av Stokes sats (M 5.2.2)
Sett $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$ for en vilkårlig konstant vektor $\boldsymbol{a}$ og et vektorfelt $\boldsymbol{u}$. Vi har ikke gjennomgått indeks-notasjon, så vi skal ikke bruke framgangsmåten vist i M 5.2.2, men vi skal se at det går bra likevel:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a} \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$$

og etter litt manipulering får vi

$$\nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \{-(\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{u})\}$$

Dessuten har vi

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Ettersom $\boldsymbol{a}$ er konstant (sett utenfor integralene) og vilkårlig (ta den bort) har vi

$$\int_S -(\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\sigma = \oint_\gamma \boldsymbol{u} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Mer generelle koordinater

(Vi baserer oss fullstendig på M kapittel 6, og vi forholder oss fullt ut til LH kapittel 3.9, 6.10 og 6.12. Vi baserer oss i mindre grad på GF kapittel 8.)

Vi skal nå forklare hvordan vi kan benytte andre koordinatsystemer enn de vanlige kartesiske. I MAT1110 diskuteres dette i forbindelse med koordinattransformer for å lette den tekniske beregningen av flate- og volumintegraler. Vi gjør det mer generelt for å beskrive hvordan vi kan uttrykke vektor-differensial-operasjoner som gradient, divergens og virvling i andre koordinatsystemer.

Kartesiske koordinater

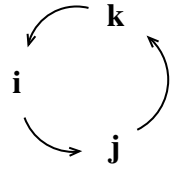
Først må vi bli fortrolig med de tre viktigste egenskapene til enhetsvektorene $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ med retning langs kurvene til de kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$. Dette viser vi ved multiplikasjonstabeller for prikk og kryss og en tabell for de deriverte:

De er ortogonale:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

De utgjør et høyrehåndsystem:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$



Og de er rettlinjet:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$

Det at koordinatene er rettlinjet betyr altså at retningsvektorene langs koordinatkurvene ikke avhenger av posisjon, da blir koordinatkurvene rette linjer.

Vi skal beskrive en framgangsmåte for å finne vektorer langs koordinatkurvene: Først skriver vi uttrykket for posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Så betrakter vi en liten forflytning vekk fra denne posisjonen. Dette beskriver vi ved det totale differensialet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$$

Regelen for å finne en vektor langs en koordinatkurve blir da:

> *Vi står på et sted $\boldsymbol{r}$ og holder alle koordinatene konstant bortsett fra én som økes litt. I hvilken retning beveger vi oss?*

Svaret på dette spørsmålet kan leses ut fra det totale differensialet og gir oss en retningsvektor langs den utvalgte koordinatkurven.

Vi ser at retningsvektorene langs de tre kartesiske koordinatkurvene er

$$\boldsymbol{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}, \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}, \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}.$$

Vi legger merke til at disse har alle enhetslengde

$$|\boldsymbol{i}| = 1, \qquad |\boldsymbol{j}| = 1, \qquad |\boldsymbol{k}| = 1.$$

Nye koordinater uttrykt ved de kartesiske koordinatene.

Vi introduserer nå nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ med tilhørende enhetsvektorer $\{\boldsymbol{i}_\alpha, \boldsymbol{i}_\beta, \boldsymbol{i}_\gamma\}$ langs koordinatkurvene.

Vi starter med å uttrykke de gamle koordinatene ved hjelp av de nye:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

Posisjonsvektor kan nå skrives ved hjelp av de nye koordinatene og de gamle enhetsvektorene langs de kartesiske koordinatkurvene

$$\boldsymbol{r} = x(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{i} + y(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{j} + z(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{k}$$

Neste skritt er å bruke framgangsmåten skissert ovenfor for å finne de nye koordinatvektorene. Det totale differensialet av posisjonsvektor med hensyn på de nye koordinatene er

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma.$$

Herfra ser vi at følgende vektorer er orientert langs de nye koordinatkurvene

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}.$$

Vi kan nå undersøke om de nye koordinatene er ortogonale, i så fall må vi ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = 0.$$

Vi kan videre undersøke om de nye koordinatene utgjør et høyrehåndsystem, i så fall må $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ peke i samme retning som $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$, osv.

Vi må imidlertid passe på, for det er ikke sikkert at de tre partiellderiverte $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ og $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ har enhetslengde. De nye koordinatene er gjerne krumlinjet (ikke rettlinjet) og således vil tabellen for de deriverte av retningsvektorene se helt annerledes ut og koordinatkurvene vil ikke være rette linjer.