MEK1100 forelesning 2, 17/1–2024 ved Karsten Trulsen
(mange kunne ikke komme til Blindern denne dagen på grunn av snøværet,
derfor er disse notatene ekstra fyldige)

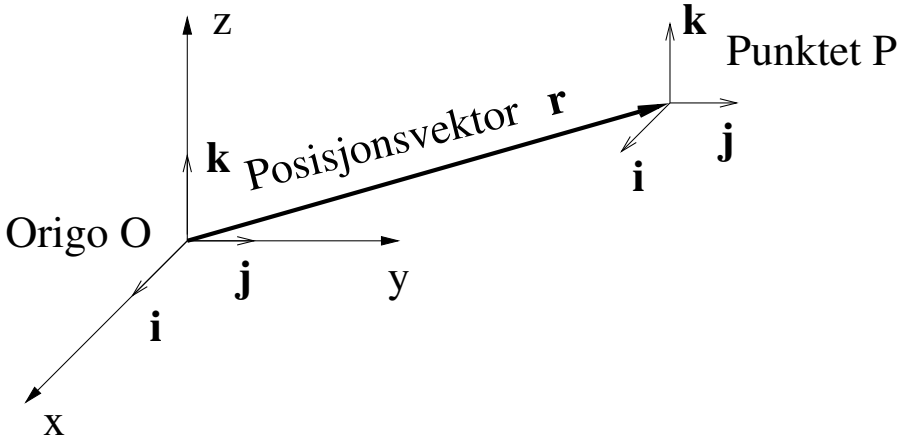
Egenskaper til koordinatsystemer

Vi skal se spesielt på enhetsvektorer i koordinatretningene, to forskjellige representasjoner av et punkt, hva vi mener med at et koordinatsystem er rettlinjet eller krumlinjet, ortogonalt/vinkelrett, og et høyrehånd- eller venstrehåndsystem.

Posisjonsvektor, koordinater og enhets vektorer i koordinatretningene

De kartesiske koordinatene er velkjent. I tredimensjonalt rom har vi de tre koordinatene x, y og z. De tilhørende aksene står normalt på hverandre. Et punkt P kan angis ved sine koordinater (x, y, z). Origo O er punktet med koordinater $(0, 0, 0)$.

I figuren ser vi en alternativ måte å angi punktet P, nemlig ved hjelp av en posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ som går fra origo O til punktet P.



Spørsmålet er hvordan vi kan representere posisjonsvektoren $\boldsymbol{r}$. Vi skal gjøre dette ved hjelp av enhetsvektorer som peker i koordinatretningene. Disse definerer vi på følgende måte:

> Du står i et punkt. Hold alle koordinatene konstant. Øk én av koordinatene litt. Hvilken retning beveger du deg?

Svaret gir en vektor som peker i retningen til den utvalgte koordinaten. Deretter kan vi sørge for at denne vektoren får enhets lengde.

Dersom vi ser tilbake på figuren ovenfor, og gjør denne øvelsen i punktet P, og deretter i origo O, og så i et hvilket som helst annet punkt, så vil vi oppdage at enhetsvektorene i koordinatretningene til de kartesiske koordinatene er de samme overalt, de er ikke funksjoner av posisjon. Derfor sier vi at det kartesiske koordinatsystemet er **rettlinjet**. Dette er faktisk en av de viktigste egenskapene til de kartesiske koordinatene!

Vi skal la enhetsvektorene til henholdsvis $\{x, y, z\}$ få navn $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, og de har altså enhets lengde $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$.

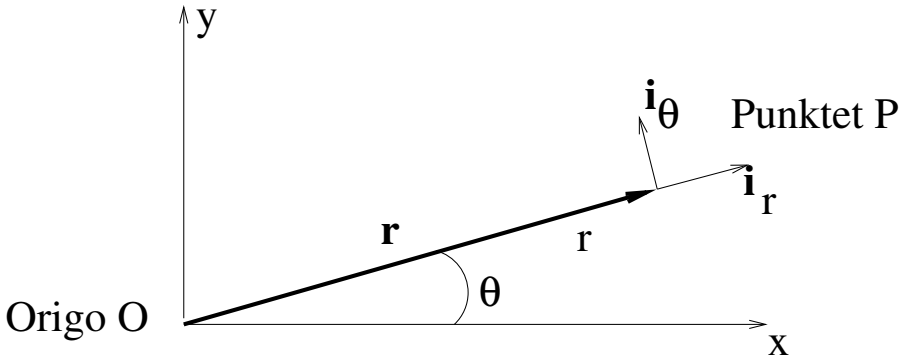
Vi kan nå skrive posisjonsvektoren fra O til P som $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Vi ser at koordinatene til P er (x, y, z) og komponentene til posisjonsvektoren til P også er

(x, y, z). Vi trenger altså ikke ta stilling til om notasjonen (x, y, z) betyr koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Vi skal straks se at dette ikke gjelder for koordinater som ikke er rettlinjet!

Polare koordinater, krumlinjede koordinater

Vi tar utgangspunkt i xy-planet med kartesiske koordinater x og y, men vi ønsker å bruke avstanden r og vinkelen θ som koordinater istedenfor de kartesiske koordinatene. Disse er relatert med $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Punktet P kan nå beskrives enten med kartesiske koordinater (x, y) eller med polare koordinater (r, θ).



La oss se på posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$. Dersom vi nå følger oppskriften for å finne enhetsvektorene i koordinatretningene i punktet P, så oppdager vi at enhetsvektoren i r-retning er $\boldsymbol{i}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$. Vi kan også finne enhetsvektoren i θ-retning, $\boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_r = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$, men vi trenger ikke uttrykket for den nå. Legg merke til at enhetsvektorene nå er funksjoner av posisjon, de avhenger av vinkelen θ. Da sier vi at det polare koordinatsystemet er **krumlinjet**.

Vi kan nå skrive posisjonsvektor fra O til P ved hjelp av de polare enhetsvektorene i punktet P, og vi legger merke til at vi da kun trenger enhetsvektoren i r-retning, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r + 0\boldsymbol{i}_\theta$. Vi ser at de polare koordinatene til P er (r, θ) mens komponentene til posisjonsvektoren til P nå er $(r, 0)$. Nå er det altså ikke likegyldig om notasjonen (α, β) betyr koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Dette er typisk for krumlinjede koordinater.

> Notasjonen (α, β) eller (α, β, γ) er grei for å angi vektorer og punkter i kartesiske koordinater, men er forvirrende for å skrive vektorer i krumlinjede koordinater fordi det da er uklart om den angir koordinater eller vektorkomponenter.

I dette emnet skal vi jobbe mye med krumlinjede koordinater. Derfor liker vi å skrive vektorer med angivelse av enhetsvektorer i koordinatretningene, og derfor prøver vi stort sett å unngå den tvetydige notasjonen (α, β).

Eksempel:

Dersom vi angir punktet P ved hjelp av posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$, hvor har det da blitt av vinkelen θ?

Svar: Enhetsvektoren $\boldsymbol{i}_r$ er en funksjon av vinkelen, så en tydeligere skrivemåte kunne ha vært $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r(\theta)$.

Skalarprodukt, ortogonale vektorer

La $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, da er skalarproduktet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Lengden av en vektor, vinkelen mellom to vektorer

Lengden av en vektor kan uttrykkes som $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$.

Vi introduserer vinkelen θ mellom to vektorer slik at $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$. Dersom vinkelen er slik at $\cos\theta = 0$, dvs. vinkel 90°, så sies vektorene å være ortogonale eller å stå "vinkelrett" eller "normalt" på hverandre.

Vi angir ortogonalitet med symbolet $\perp$.

Merk at dersom $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ så er enten $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ eller $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er ortogonal.

Rettvinklet koordinatsystem

Når alle enhetsvektorene står vinkelrett på hverandre vil multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene ser slik ut:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

For å finne ut om et koordinatsystem er rettvinklet kan vi undersøke om multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene til koordinatene ser slik ut.

Kryssprodukt, parallelle vektorer

Kryssproduktet kan vi skrive symbolsk ved hjelp av en determinant

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

og fra dette følger det at $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta$.

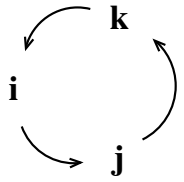
To vektorer med lengde ulik null er parallelle dersom kryssproduktet er null. Vi angir parallellitet med symbolet $\|$.

Merk at dersom $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ så er enten $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$ eller $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er parallell.

Når alle enhetsvektorene til koordinatene står vinkelrett på hverandre vil multiplikasjonstabellen for kryssproduktet mellom dem se slik ut (første faktor fra søylen til venstre, andre faktor fra raden øverst):

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

En alternativ måte å representere dette på er ved hjelp av hjulet:



Høyrehånds eller venstrehånds rettvinklet koordinatsystem

Hjulet vist ovenfor er en huskeregel for hvordan vi kan bruke fingrene på en hånd for å finne retningen til et kryssprodukt. Første faktor tilsvarer pekefinger til lillefinger rett fram, andre faktor tilsvarer pekefinger til lillefinger bøyd innover, da er resultatet gitt ved tommelen. Dersom dette gjøres med henholdsvis høyre eller venstre hånd, så sier vi at koordinatsystemet er et høyre- eller venstrehåndssystem.

Vi skal kun benytte oss av høyrehåndsystemer.

Illustrasjon av skalarfelt

Vi betrakter skalarfeltet $z = x^2 + y^2$. Dette illustrerer vi på følgende måter:

- kontur for konstant verdi av z
- skjæring i plan for konstant verdi av x eller y
- skygge-/fargelegging for å skape 3D effekt

Her begrenser vi oss til Matlab [1] og følger oppskriftene i GF kapittel 3. For de som foretrekker Python har vi laget en oversettelse av GF kapittel 3 til Python. For de som foretrekker GeoGebra kan man se på appene som gjøres tilgjengelig.

Først velger vi intervaller langs x- og y-aksene med passende diskretiseringer. La oss velge $-1 \leq x \leq 1$ og $-2 \leq y \leq 2$, hver diskretisert med 30 punkter (vi ønsker et relativt stort antall diskrete punkter for å få en glatt overflate):

```
x = linspace(-1,1,30);
y = linspace(-2,2,30);
```

Vi lager et rutenett, dvs. koordinatene til de 30×30 punktene hvor diskretiseringene til x og y krysser hverandre. Og vi regner ut funksjonsverdiene. Det er 900 koordinatpar (x, y), de skjuler vi ved å skrive semikolon:

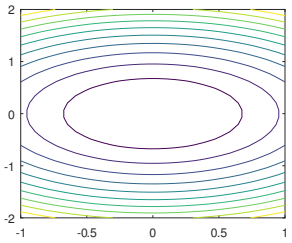
```
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
z = xx.^2 + yy.^2;
```

Punktum foran en regneoperasjon betyr at den gjøres komponentvis. Sjekk størrelsen på disse variablene med `size(x)` og `size(xx)`.

Nå er vi klare til å plotte. Først konturer for konstante verdier for z:

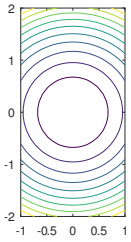
```
contour(xx,yy,z)
```

[1] Som student på UiO har du tilgang til Matlab over Internett ved å åpne `http://view.uio.no` i en nettleser og logge inn med din UiO bruker, eller du kan installere Matlab på din datamaskin for eksempel ved å følge denne oppskriften fra IFI eller ved å følge denne oppskriften fra MAT1110. Alternativt kan du installere Octave som er gratis og som fungerer nesten likt med Matlab.



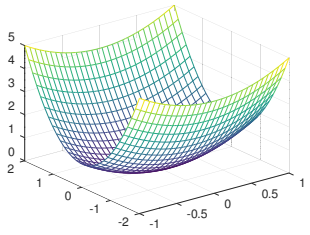
Det er kanskje overraskende at dette ser ut som ellipser og ikke sirkler? I så fall må enhetene langs aksene gjøres like:

```
axis('equal')
```



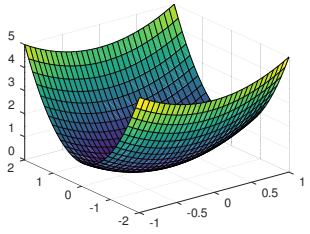
Deretter lager vi skjæringer for konstante verdier for x og y:

```
mesh(xx,yy,z)
```



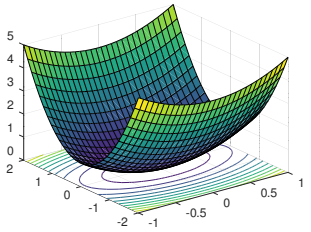
Så skygge-/fargelegging sammen med skjæringer som ovenfor:

```
surf(xx,yy,z)
```



Og til slutt sammen med konturer nede i xy-planet:

```
surfc(xx,yy,z)
```



Dersom du støter på uforklarlige problemer kan det være greit å vite at kommandoene `rehash` og `rehash toolboxcache` får Matlab til å resette seg, `clear` fjerner alle variabler, og `close` lukker grafikkvindu.

Flere gode tips finnes i GF kapittel 3.

Illustrasjon av vektorfelt

Vi betrakter vektorfeltet $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Dette skal vi illustrer ved pileplott.

Først velger vi intervaller langs x- og y-aksene med passende diskretiseringer. La oss velge $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$, hver diskretisert med 5 punkter. Merk at for flatene ovenfor brukte vi et stort antall punkter for å få inntrykk av at flatene var glatte, men for pileplott ønsker vi et relativt lite antall punkter for å kunne se hver enkelt pil!

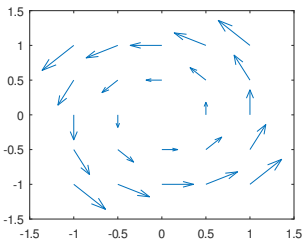
```
x = linspace(-1,1,5);
y = linspace(-1,1,5);
```

Vi lager et rutenett, dvs. koordinatene til de 5×5 punktene hvor diskretiseringene til x og y krysser hverandre.

```
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
```

Så bruker vi kommandoen `quiver` som betyr "kogger":

```
quiver (xx, yy, -yy, xx);
```



For ytterligere detaljer om plotting i MATLAB, se kapittel 3 i GF. For detaljer om plotting Python, se oversettelsen av kapittel 3 i GF til Python. For eksempel på plotting i GeoGebra, se app for demonstrasjon.

Litt regning med vektorer
Vi bør trene oss i å regne med vektorer!

For skalarproduktet har vi $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

For kryssproduktet har vi $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

Trippel skalar produktet er lik volumet av parallellepipedet som spennes ut av de tre vektorene, derfor er det ikke overraskende at vi kan permutere syklisk

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

Her er det ikke nødvendig å sette parentes rundt kryssproduktet fordi kryssproduktet må nødvendigvis gjøres først for at uttrykkene skal være meningsfulle.

Trippel vektor produkt er

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ba} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{ca} \cdot \boldsymbol{b}$$

og

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ba} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{c}$$

Her er altså nødvendig å sette parentes fordi resultatet blir forskjellig i de to tilfellene.

Dyade prikkprodukt kan gjøres i hvilken som helst rekkefølge

$$\boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

så det er ikke nødvendig å skrive parentes, men for praktisk regning er det mye mindre arbeidskrevende å regne ut skalarproduktet først.

Eksempel
Bruk disse regnereglene for å vise at

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$$