MEK1100 forelesning 20, 8/4–2024 ved Karsten Trulsen

Mer generelle koordinater

(Vi starter med en fullstendig repetisjon av det vi sa om generelle koordinater i forrige forelesning.)

(Vi baserer oss fullstendig på M kapittel 6, og vi forholder oss fullt ut til LH kapittel 3.9, 6.10 og 6.12. Vi baserer oss i mindre grad på GF kapittel 8.)

Vi skal nå forklare hvordan vi kan benytte andre koordinatsystemer enn de vanlige kartesiske. I MAT1110 diskuteres dette i forbindelse med koordinattransformer for å lette den tekniske beregningen av flate- og volumintegraler. Vi gjør det mer generelt for å beskrive hvordan vi kan uttrykke vektor-differensial-operasjoner som gradient, divergens og virvling i andre koordinatsystemer.

Kartesiske koordinater

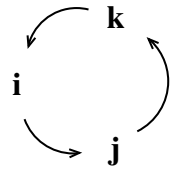
Først må vi bli fortrolig med de tre viktigste egenskapene til enhetsvektorene $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ med retning langs kurvene til de kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$. Dette viser vi ved multiplikasjonstabeller for prikk og kryss og en tabell for de deriverte:

De er ortogonale:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

De utgjør et høyrehåndsystem:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$



Og de er rettlinjet:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$

Det at koordinatene er rettlinjet betyr altså at retningsvektorene langs koordinatkurvene ikke avhenger av posisjon, da blir koordinatkurvene rette linjer.

Vi skal beskrive en framgangsmåte for å finne vektorer langs koordinatkurvene: Først skriver vi uttrykket for posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Så betrakter vi en liten forflytning vekk fra denne posisjonen. Dette beskriver vi ved det totale differensialet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$$

Regelen for å finne en vektor langs en koordinatkurve blir da:

Vi står på et sted $\boldsymbol{r}$ og holder alle koordinatene konstant bortsett fra én som økes litt. I hvilken retning beveger vi oss?

Svaret på dette spørsmålet kan leses ut fra det totale differensialet og gir oss en retningsvektor langs den utvalgte koordinatkurven.

Vi ser at retningsvektorene langs de tre kartesiske koordinatkurvene er

$$\boldsymbol{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}, \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}, \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}.$$

Vi legger merke til at disse har alle enhetslengde

$$|\boldsymbol{i}| = 1, \qquad |\boldsymbol{j}| = 1, \qquad |\boldsymbol{k}| = 1.$$

Nye koordinater uttrykt ved de kartesiske koordinatene.

Vi introduserer nå nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ med tilhørende enhetsvektorer $\{\boldsymbol{i}_\alpha, \boldsymbol{i}_\beta, \boldsymbol{i}_\gamma\}$ langs koordinatkurvene.

Vi starter med å uttrykke de gamle koordinatene ved hjelp av de nye:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

Posisjonsvektor kan nå skrives ved hjelp av de nye koordinatene og de gamle enhetsvektorene langs de kartesiske koordinatkurvene

$$\boldsymbol{r} = x(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{i} + y(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{j} + z(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{k}$$

Neste skritt er å bruke framgangsmåten skissert ovenfor for å finne de nye koordinatvektorene. Det totale differensialet av posisjonsvektor med hensyn på de nye koordinatene er

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma.$$

Herfra ser vi at følgende vektorer er orientert langs de nye koordinatkurvene

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}.$$

Vi kan nå undersøke om de nye koordinatene er ortogonale, i så fall må vi ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = 0.$$

Vi kan videre undersøke om de nye koordinatene utgjør et høyrehåndsystem, i så fall må $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ peke i samme retning som $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$, osv.

Vi må imidlertid passe på, for det er ikke sikkert at de tre partiellderiverte $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}$ og $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ har enhetslengde. De nye koordinatene er gjerne krumlinjet (ikke rettlinjet) og således vil tabellen for de deriverte av retningsvektorene se helt annerledes ut og koordinatkurvene vil ikke være rette linjer.

Ettersom de tre partiellderiverte $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ ikke trenger å ha enhets lengde introduserer vi såkalte *skaleringsfaktorer*

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|, \qquad h_\beta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right|, \qquad h_\gamma = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\right|$$

Enhetsvektorene blir dermed

$$\boldsymbol{i}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$$

Vi skal stort sett begrense oss til ortogonale høyrehåndsystemer

Det vil være nødvendig å sjekke at koordinatene oppfyller betingelsene for skalar- og kryssprodukt. I utgangspunktet skulle man tro at det var nødvendig å sjekke alle 18 elementer i multiplikasjonstabellene for skalar- og kryssprodukt, men heldigvis er det tilstrekkelig å sjekke kun fire betingelser. For å sjekke ortogonalitet er det tilstrekkelig å sjekke

$$\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$$

Dersom ortogonalitet allerede er oppfylt så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt for å sikre at det er et høyrehåndsystem

$$\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$$

Eksempel: Vis at dersom de fire betingelsene ovenfor er oppfylt, så er betingelsene $\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\alpha$ og $\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$ allerede oppfylt.

Vi kan substituere bort $\boldsymbol{i}_\gamma$ og bruke formelen $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ba} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{ca} \cdot \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \times (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) = \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\beta - \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\alpha$$

$$\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\alpha - \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$$

Eksempel: Koordinater som ikke er ortogonale.

$$x = \alpha + \beta \qquad y = \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j} + \gamma \boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{i} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ som betyr at koordinatene ikke er ortogonale.

Eksempel: Ortogonale koordinater som ikke er et høyrehåndsystem.

$$x = \beta \qquad y = \alpha \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = \beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{j} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} \qquad h_\beta = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Derimot har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = -\boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette ikke er et høyrehåndsystem.

Dette er et venstrehåndsystem.

Eksempel: Et ortogonalt høyrehåndsystem som er rettlinjet.

$$x = \alpha + \beta \qquad y = -\alpha + \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{i} + (-\alpha + \beta)\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \qquad h_\alpha = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \frac{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Dessuten har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette er et høyrehåndsystem. I tillegg har vi at alle de nye koordinatvektorene er konstant, uavhengige av koordinatene, som betyr at systemet er rettlinjet.

Infinitesimalt kurveelement

Vi kan nå skrive det infinitesimale kurveelementet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha + h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta + h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma$$

hvor vi kan betrakte hvert ledd som bidraget fra sin respektive koordinat

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma$$

Gradient

La f være et skalarfelt. Vi kan finne gradienten til f fra det totale differensialet

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma$$

som vi skal kreve er lik den retningsderiverte med gradienten

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

La oss nå si at gradienten til f kan skrives som

$$\nabla f = \boldsymbol{i}_\alpha A + \boldsymbol{i}_\beta B + \boldsymbol{i}_\gamma C$$

hvor vi altså ønsker å finne A, B og C.

Vi multipliserer ut

$$\mathrm{d}f = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \cdot (\boldsymbol{i}_\alpha A + \boldsymbol{i}_\beta B + \boldsymbol{i}_\gamma C)\mathrm{d}\alpha + h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \cdot (\boldsymbol{i}_\alpha A + \boldsymbol{i}_\beta B + \boldsymbol{i}_\gamma C)\mathrm{d}\beta + h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \cdot (\boldsymbol{i}_\alpha A + \boldsymbol{i}_\beta B + \boldsymbol{i}_\gamma C)\mathrm{d}\gamma = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma$$

og vi separerer ut koeffisientene foran $\mathrm{d}\alpha$ og $\mathrm{d}\beta$ og $\mathrm{d}\gamma$ hver for seg

$$A + \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta B + \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma C = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

$$\boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha A + B + \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma C = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta}$$

$$\boldsymbol{i}_\gamma \cdot \boldsymbol{i}_\alpha A + \boldsymbol{i}_\gamma \cdot \boldsymbol{i}_\beta B + C = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

Dette er et 3 likninger i 3 ukjente. Løsningen kommer ikke til å se vakker ut med mindre vi krever at koordinatene er ortogonale. Derfor skal vi nå kreve ortogonalitet.

For ortogonale koordinater vil 3×3 systemet ovenfor reduseres slik at det får en spesielt enkel løsning, $A = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ og $B = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta}$ og $C = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma}$, og det lett å se at gradienten av en skalar blir

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

Merk at dette enkle uttrykket kun gjelder for ortogonale koordinater!

Tilsvarende kan vi skrive uttrykket for del-operatoren

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

I dette uttrykket tenker vi oss at derivasjonsoperasjonene skal virke mot høyre for å anvendes på det som måtte komme til høyre for del-operatoren.

Flateelement

Vi har tidligere diskutert (forelesning 10 den 14.februar) at dersom en flate er parameterisert med to skalarer v og w, slik at hvert punkt på flaten er gitt ved 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(v, w)$, så kan vi betrakte infinitesimale flateelement spent ut av de infinitesimale tangentvektorene

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

I så fall kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

I dette ovenstående uttrykket er det ikke noe krav om at koordinatene er ortogonale.

Dersom vi begrenser oss til ortogonale koordinater som utgjør et høyrehåndsystem, som diskutert ovenfor, så er det mest naturlig å se på flateelementer som er parallellogrammer som spennes ut av to av de tre kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta\,\mathrm{d}\beta$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma\,\mathrm{d}\gamma$. Vi får i så fall følgende flateelementer

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta = h_\alpha h_\beta \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \times h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma = h_\beta h_\gamma \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma \times h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha = h_\gamma h_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\alpha \end{cases}$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (eksempel 6.12.4 på side 684–686) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem: De ender opp med å beregne en determinant for kryssproduktet.