MEK1100 forelesning 21, 10/4–2024 ved Karsten Trulsen

Mer generelle koordinater

Volumelement

Vi har tidligere diskutert (forelesning 11 den 19.februar) at dersom et legeme er parameterisert med tre skalarer u, v og w, slik at hvert punkt i legemet er gitt ved 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(u,v,w)$, så kan vi betrakte infinitesimale volumelement som parallellepiped spent ut av de infinitesimale tangentvektorene

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

I så fall kan vi beregne det infinitesimale volumet ved å ta vektor-trippelproduktet

$$\mathrm{d}\tau = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}_u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

I dette uttrykket er det ikke noe krav om at koordinatene er ortogonale. Absoluttverditegnet kan være nødvendig for å få positivt svar dersom (u,v,w) ikke utgjør et høyrehåndsystem. Den praktiske utregningen av vektor-trippelproduktet er å beregne Jacobi-determinanten

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Dersom vi begrenser oss til ortogonale koordinater som utgjør et høyrehåndsystem, som diskutert ovenfor, så er det mest naturlig å se på et volumelement som er et rettvinklet parallellepiped (en boks) som spennes ut av de tre kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta\,\mathrm{d}\beta$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma\,\mathrm{d}\gamma$. Vi får i så fall

$$\mathrm{d}\tau = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha\,\mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta\,\mathrm{d}\beta \cdot h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma\,\mathrm{d}\gamma = h_\alpha h_\beta h_\gamma\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (Teorem 6.10.1 på side 663) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem: De ender opp med å beregne en Jacobi-determinant. Vårt produkt av tre skaleringsfaktorer er lik denne Jacobi-determinanten.

Divergens i krumlinjede koordinater

Husk hvordan vi definerte divergensen som en grenseverdi av et fluksintegral delt på et volum (forelesning 11 den 19.februar, M kap. 3.3). Denne definisjonen hjelper oss å forstå hvordan divergens kan uttrykkes i generelle krumlinjede koordinater nå:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

hvor S er en lukket flate som omslutter et volum V, og hvor grenseoppgangen er slik at volumet skrumper inn til et punkt ($\boldsymbol{r}_0$).

Vi tenker oss at volumet kan ha en komplisert form i de "opprinnelige" kartesiske koordinatene, men representert med parameterene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er det en boks med sentrum i $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ og med sidekanter $\{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma\}$. De nye koordinatene gir en enkel parameterisering av volumet.

Volumet i det kartesiske koordinatsystemet er gitt ved integralet

$$V = \int \mathrm{d}\tau = \iiint h_\alpha h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \approx h_\alpha h_\beta h_\gamma \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider), og splitte opp fluksintegralet i bidrag fra hver side

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int_{S_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

1. Flaten er $\alpha = \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\alpha$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\alpha(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta, \gamma)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \, \Delta\beta\Delta\gamma$.

$$\int_{S_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \, \Delta\beta\Delta\gamma$$

2. Flaten er $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\beta$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\beta(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\alpha\Delta\gamma$.

3. Flaten er $\gamma = \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\gamma$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\alpha\Delta\beta$.

4. Flaten er $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\gamma$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\alpha\Delta\beta$.

5. Flaten er $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\beta$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_\beta(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\alpha\Delta\gamma$.

6. Flaten er $\alpha = \alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\alpha$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_\alpha(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er tilnærmet $[-h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \, \Delta\beta\Delta\gamma$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6:

$$\left(\int_{S_1} + \int_{S_6}\right) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} \, \Delta\beta\Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(h_\beta h_\gamma v_\alpha\right) \Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 2 og 5:

$$(\int_{S_2} + \int_{S_5})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \approx [h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0,\beta_0-\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}^{(\alpha_0,\beta_0+\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}\,\Delta\alpha\Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\alpha h_\gamma v_\beta\right)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 3 og 4:

$$(\int_{S_3} + \int_{S_4})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \approx [h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0-\frac{\Delta\gamma}{2})}^{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0+\frac{\Delta\gamma}{2})}\,\Delta\alpha\Delta\beta \approx \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(h_\alpha h_\beta v_\gamma\right)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for fluksintegralet i teller og for volumet i nevner i den opprinnelige formelen for divergens. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de tre delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Til slutt har vi

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_\beta h_\gamma v_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\alpha h_\gamma v_\beta\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(h_\alpha h_\beta v_\gamma\right)\right\}$$

Laplace operatoren anvendt på en skalar

Laplace-operatoren ∇^2 anvendt på en skalar f kan uttrykkes som divergensen til gradienten av f

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)\right\}$$

Virvling i krumlinjede koordinater

Husk hvordan vi definerte virvlingen som en grenseverdi av sirkulasjon delt på et areal (forelesning 12 den 21.februar, M kap. 3.4). Denne definisjonen hjelper oss å forstå hvordan virvling kan uttrykkes i generelle krumlinjede koordinater nå:

$$\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_\lambda \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

hvor λ en lukket kurve som omslutter og avgrenser en flate S med areal A, og hvor grenseoppgangen er slik at flaten skrumper inn til et punkt $(\boldsymbol{r}_0)$. Flaten S har enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$. Kurven λ og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven λ.

Vi tenker oss at den lukkede kurven λ og flaten S kan ha kompliserte former i de "opprinnelige" kartesiske koordinatene, men representert med parameterene $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ er det et rektangel med sentrum i $\{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0\}$ orientert parallelt med $\beta\gamma$-planet og med sidekanter $\Delta\beta$ og $\Delta\gamma$. De nye koordinatene gir en enkel parameterisering av kurven og flaten.

Arealet i det kartesiske koordinatsystemet er gitt ved integralet

$$A = \int_S \mathrm{d}\sigma = \iint h_\beta h_\gamma\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma \approx h_\beta h_\gamma\,\Delta\beta\,\Delta\gamma$$

Normalvektoren er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\alpha$ i positiv α-retning og kurven λ er orienterert i henhold til høyrehåndsregelen.

La oss nummerere sidene i integrasjonsretning med 1 nederst, og splitte opp sirkulasjonsintegralet i bidrag fra hver side

$$\oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\lambda_i} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

1. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $|\beta - \beta_0| \leq \frac{\Delta\beta}{2}$ og $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \, \mathrm{d}\beta$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\beta v_\beta \, \mathrm{d}\beta$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\beta$.

2. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \, \mathrm{d}\gamma$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\gamma v_\gamma \, \mathrm{d}\gamma$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\gamma$.

3. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \, \mathrm{d}\beta$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\beta v_\beta \, \mathrm{d}\beta$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[-h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\beta$.

4. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \, \mathrm{d}\gamma$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\gamma v_\gamma \, \mathrm{d}\gamma$. Kurveintegralet langs siden er tilnærmet $[-h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\gamma$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3:

$$[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\beta - [h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \, \Delta\beta \approx - \left. \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(h_\beta v_\beta \right) \right|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 2 og 4:

$$[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\gamma - [h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \, \Delta\gamma \approx \left. \frac{\partial}{\partial\beta} \left(h_\gamma v_\gamma \right) \right|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for sirkulasjonsintegralet i teller og for arealet i nevner i den opprinnelige formelen for virvling. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de to delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Foreløpig har vi kun bestemt én komponent av virvlingen. For å bestemme de to resterende komponentene av virvlingen må vi gjøre det samme regnestykket to ganger til, med normalvektor $\boldsymbol{n}$ orientert i to ortogonale retninger.

Til slutt viser det seg at vi kan presentere sluttresultatet på en meget kompakt måte ved hjelp av determinanten

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha & h_\beta \boldsymbol{i}_\beta & h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial\beta} & \frac{\partial}{\partial\gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix}$$