MEK1100 forelesning 22, 15/4–2024 ved Karsten Trulsen

**Sylinderkoordinater**

Det er flere måter å navngi sylinderkoordinater. Gjevik & Fagerland bruker $\{r,\theta,z\}$, Matthews bruker $\{R,\phi,z\}$, Lindstrøm & Hveberg benytter $\{r,\theta,z\}$, og en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system bruker ISO standard $\{\rho,\varphi,z\}$. Den første kalles radiell koordinat, den andre kalles asimut (vinkelen langs horisonten), og den tredje kalles høyde.

Det er problematisk for oss å bruke $\rho$ for radiell koordinat siden vi skal bruke $\rho$ for massetetthet ellers i MEK1100. Det er også litt problematisk å bruke $r$ for radiell koordinat fordi vi straks skal introdusere posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ som i så fall vil ha lengde forskjellig fra $r$. I disse forelesningsnotatene skal vi benytte $\{R,\theta,z\}$.

**Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.**

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og sylinderkoordinatene (de gamle koordinatene som funksjon av de nye)

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Posisjonsvektor blir

$$\boldsymbol{r} = R\cos\theta\,\boldsymbol{i} + R\sin\theta\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer og enhetsvektorer langs koordinataksene

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial R} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j} \qquad h_R = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial R}\right| = 1 \qquad \boldsymbol{i}_R = \frac{1}{h_R}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial R} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = -R\sin\theta\,\boldsymbol{i} + R\cos\theta\,\boldsymbol{j} \qquad h_\theta = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\right| = R \qquad \boldsymbol{i}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k} \qquad h_z = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z}\right| = 1 \qquad \boldsymbol{i}_z = \frac{1}{h_z}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

Vi kan nå sjekke at sylinderkoordinatene er ortogonale

$$\boldsymbol{i}_R\cdot\boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{i}_R\cdot\boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{i}_\theta\cdot\boldsymbol{i}_z = 0$$

Dernest kan vi sjekke at sylinderkoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\boldsymbol{i}_R\times\boldsymbol{i}_\theta = (\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})\times(-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}_z$$

Sylinderkoordiatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene er

| | $\boldsymbol{i}_R$ | $\boldsymbol{i}_\theta$ | $\boldsymbol{i}_z$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial}{\partial R}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial\theta}$ | $\boldsymbol{i}_\theta$ | $-\boldsymbol{i}_R$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial z}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av sylinderkoordinater og tilhørende enhetsvektorer

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{i}_z$$

og differensialet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_R\,\mathrm{d}R + R\boldsymbol{i}_\theta\,\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{i}_z\,\mathrm{d}z$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:
Gradienten til en skalar $f$

$$\nabla f = \boldsymbol{i}_R\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergensen av en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(Rv_R\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar $f$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Virvlinga til en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_R & R\boldsymbol{i}_\theta & \boldsymbol{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_R & Rv_\theta & v_z \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{i}_R}{R}\left(\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - R\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) + \boldsymbol{i}_\theta\left(\frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial R}\right) + \frac{\boldsymbol{i}_z}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(Rv_\theta) - \frac{\partial v_R}{\partial\theta}\right)$$

**Eksempel: Direkte utregning av divergens og virvling uten bruk av de "ferdige" formlene gitt ovenfor**
Dersom vi skriver del-operatoren

$$\nabla = \boldsymbol{i}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

og en generell vektor

$$\boldsymbol{v} = v_R\boldsymbol{i}_R + v_\theta\boldsymbol{i}_\theta + v_z\boldsymbol{i}_z$$

så får vi nøyaktig samme uttrykk for divergens og virvling ved å regne ut direkte $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ og $\nabla\times\boldsymbol{v}$, knepet er å la derivasjonsoperasjonene bli utført før vi gjør prikk- eller kryss-operasjonene, og husker på at enhetsvektorene også må deriveres i henhold til derivasjonstabellen for enhetsvektorene vist ovenfor.

**Eksempel: Analyse av hastighetsfeltet til en karusell**
La posisjonsvektor være $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{i}_z$ og la vinkelhastigheten være $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{i}_z$.
Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \omega R\boldsymbol{i}_\theta$.
Hastighetsfeltet er divergensfritt

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega R) = 0$$

Virvlinga er

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}_z}{R}\frac{\partial}{\partial R}(\omega R^2) = 2\omega \boldsymbol{i}_z = 2\boldsymbol{\omega}$$

Vi kan også finne strømlinjene. Dette kan vi enten gjøre ved å løse likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ direkte, eller vi kan først finne en strømfunksjon. Ettersom vi her har med et 2D og divergensfritt felt vet vi at det finnes en strømfunksjon, så la oss finne den: Hastighetsfeltet er 2D i $\{R, \theta\}$-koordinatene. Vi konstruerer derfor et vektorpotensial $\boldsymbol{A} = -\psi(R, \theta)\boldsymbol{i}_z$ og representerer hastighetsfeltet med $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_z \times \nabla\psi(R, \theta)$, eller

$$v_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad \text{og} \qquad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

Vi finner strømfunksjonen $\psi = \frac{1}{2}\omega R^2 + \text{en konstant}$.

Vi har altså strømlinjene gitt ved $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i}_z \times \nabla\psi) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla\psi\,\mathrm{d}z - \boldsymbol{i}_z \nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, og ettersom $\nabla\psi$ ikke har komponent i $z$-retning, og $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\psi$, så er strømlinjene gitt ved $z$ lik en konstant og $\psi$ lik en konstant, dvs sirkler med radius $R$ rundt $z$-aksen med fastholdt $z$-verdi.

### Kulekoordinater

*NB! Det ble ikke forelest om kulekoordinater i denne forelesningen, men det oppsummeres her som referanse fordi det passer i denne sammenhengen.*

Det er flere måter å navngi kulekoordinater. Gjevik & Fagerland benytter $\{r, \theta, \varphi\}$, Matthews benytter $\{r, \theta, \phi\}$, Lindstrøm & Hveberg benytter $\{\rho, \phi, \theta\}$ og definerer $r = \rho \sin\phi$, og en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system benytter ISO standard $\{r, \theta, \varphi\}$ som er vanlig blant fysikere, og de påpeker at blant matematikere er det vanlig å bruke $\{r, \varphi, \theta\}$. Den første kalles radiell koordinat, den andre kalles polar vinkel, og den tredje kalles asimut (vinkelen langs horisonten).

I disse forelesningsnotatene skal vi benytte $\{r, \theta, \varphi\}$ selv om det kolliderer med notasjonen i matematikk-emnene.

**Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.**

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og sylinderkoordinatene

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\theta\boldsymbol{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \qquad h_r = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - r\sin\theta\,\boldsymbol{k} \qquad h_\theta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = r$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} \qquad h_\varphi = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta$$

og enhetsvektorer langs koordinatenes retninger

$$\boldsymbol{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}_\theta = -\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

Vi kan nå sjekke at kulekoordinatene er ortogonale

$$\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_\varphi = \boldsymbol{i}_\theta \cdot \boldsymbol{i}_\varphi = 0$$

Dernest kan vi sjekke at kulekoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_\theta = (\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}) \times (-\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}_\varphi$$

Kulekoordiatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene langs koordinataksene er

| | $\boldsymbol{i}_r$ | $\boldsymbol{i}_\theta$ | $\boldsymbol{i}_\varphi$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial}{\partial r}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial \theta}$ | $\boldsymbol{i}_\theta$ | $-\boldsymbol{i}_r$ | $\boldsymbol{0}$ |
| $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ | $\sin\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi$ | $\cos\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi$ | $(-\sin\theta\,\boldsymbol{i}_r - \cos\theta\,\boldsymbol{i}_\theta)$ |

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av kulekoordinater og enhtsvektorer langs koordinataksene

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$$

og differensialet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_r\,\mathrm{d}r + r\boldsymbol{i}_\theta\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:
Gradienten til en skalar $f$

$$\nabla f = \boldsymbol{i}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{i}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Divergensen av en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar $f$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Virvlinga til en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_r & r\boldsymbol{i}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & rv_\theta & r\sin\theta v_\varphi \end{vmatrix}$$

## Eulersk og Lagrangesk beskrivelse, partikkelhastighet og felthastighet, partikkelakselerasjon

BG kap. 10

Vi har lært at et hastighetsfelt kan beskrives som en funksjon av posisjon og tid, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Dette kalles en Eulersk beskrivelse.

Alternativt kan vi beskrive hvordan en partikkel beveger seg som funksjon av tid $\boldsymbol{r}_p(t)$. Dette kalles en Lagrangesk beskrivelse.

Hastigheten til partikkelen er lik den tidsderiverte av posisjonen,

$$\boldsymbol{v}_p(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Partikkelens hastighet må være lik felthastigheten i partikkelen sin posisjon

$$\boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t).$$

Akselerasjonen til partikkelen er

$$\boldsymbol{a}_p(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p}{\mathrm{d}t} \cdot \nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)\right]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p(t)} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p(t)}$$

De to leddene på høyre side kalles henholdsvis lokalakselerasjon og konvektiv akselerasjon. Lokalakselerasjon skyldes at feltet ikke er stasjonært. Konvektiv akselerasjon skyldes at partikkelen har flyttet seg til et nytt sted hvor hastighetsfeltet er ulikt der hvor partikkelen kommer fra.

**Eksempel: Hastighetsfeltet til en karusell, en partikkel på en karusell**

Vi har sett at hastighetsfeltet til en karusell kan beskrives ved $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega R \boldsymbol{i}_\theta$. Dette er en Eulersk beskrivelse. Legg merke til at vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ ikke er et felt, fordi den ikke er en funksjon av posisjon, men den kan være en funksjon av tid. Hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ er et felt fordi det er en entydig funksjon av posisjon $\boldsymbol{r}$ og det kan også være en funksjon av tid. Koordinatvektoren $\boldsymbol{i}_\theta$ er et felt fordi den er en funksjon av posisjon, men den er ikke en funksjon av tid, så vi kunne egentlig ha skrevet $\boldsymbol{i}_\theta(\boldsymbol{r})$.

Dersom vinkelhastigheten er konstant (i tid), $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$, så er også hastighetsfeltet konstant i tid, eller stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.

En partikkel som følger karusellen har posisjon $\boldsymbol{r}_p(t)$, og har hastighet $\boldsymbol{v}_p(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t) = \omega R \boldsymbol{i}_\theta(\boldsymbol{r}_p(t))$. Dette er en Lagrangesk beskrivelse.

Selv om vinkelhastigheten er konstant, så er likevel ikke partikkelens hastighet konstant, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{0}$, fordi vi vet at en partikkel som følger karusellen vil bevege seg i sirkel og således hele tiden skifte retning.

Til slutt kan vi regne ut partikkelakselerasjonen for en karusell med konstant vinkelhastighet. Vi vet allerede at det ikke er lokalakselerasjon i dette tilfellet. Derimot er det konvektiv akselerasjon rettet inn mot rotasjonsaksen

$$\boldsymbol{a}_p = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p(t)} = \left(\omega \frac{\partial}{\partial \theta}\right)(\omega R \boldsymbol{i}_\theta)\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p(t)} = -\omega^2 R \boldsymbol{i}_R\big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_p(t)} = -\omega^2 R \boldsymbol{i}_R(\boldsymbol{r}_p(t))$$