MEK1100 forelesning 23, 17/4–2024 ved Karsten Trulsen

Fluid- og kontinuumsmekanikk

BG kapittel 10.

Som eksempel på anvendelse av vektor feltteori og flervariabel kalkulus, og som illustrasjon av begrepene vi har gått igjennom så langt, og som introduksjon til et selvstendig fagfelt som i stor grad er basert på denne typen matematikk, skal vi nå etablere feltlikninger for fluid- og kontinuumsmekanikk. Vi skal også se tilsvarende anvendelser innen andre fagområder, for eksempel modellering av trafikk langs veier. Vi kunne ha hentet eksempler fra elektromagnetisme, men det skal vi ikke gjøre her.

Kontinuum

Ideen om "kontinuum", eller kontinuerlig medium, ble formulert allerede av Aristoteles (384–322 f.Kr.): Noe som kan deles opp i stadig mindre biter som alltid har de samme egenskapene som de opprinnelige større bitene uansett hvor mye vi deler det opp.

Kontinuumshypotesen

"Kontinuumshypotesen" i mekanikk er antakelsen om at vi kan beskrive et medium som et kontinuum. Under kontinuumshypotesen tenker vi oss at egenskaper som tetthet, trykk, temperatur og hastighet er veldefinert for vilkårlig små volumelementer.

I praksis forstår vi at kontinuumshypotesen slutter å være gyldig dersom vi deler opp et medium i alt for små biter. Dersom vi betrakter et fluid som består av molekyler så kan vi ikke dele opp molekylene uten at egenskapene til delene (atomene) er ulik egenskapene til molekylene. Dersom vi prøver å modellere biltrafikk på en vei som et fluid så er det meningsløst å dele opp bilene i sine elementære bestanddeler. Kontinuumshypotesen slutter å være gyldig i disse tilfellene når vi kommer ned til en lengdeskala som er sammenliknbar med eller mindre enn størrelsen på henholdsvis et molekyl eller en bil.

Ordet "kontinuumshypotese" brukes også innen matematikk, men i en helt annen betydning som ikke må forveksles med kontinuumshypotesen i fluidmekanikk.[1]

Fluid partikkel

En "fluid partikkel" er et infinitesimalt volum av et fluid, med masse, utstrekning, massetetthet osv. Vi kan godt tenke oss en fluid partikkel som en punktmasse. Tanken om at en fluid partikkel kan brukes som utgangspunkt for å beskrive oppførselen til et fluid ble introdusert av Leonhard Euler (1707–1783).

[1] I mengdeteori er kontinuumshypotesen en antakelse om at det ikke eksisterer en mengde som har kardinalitet strengt mellom kardinalitetene til de hele tallene og de reelle tallene. Antakelsen ble framsatt i 1878 av Georg Cantor (1845–1918). Kardinaliteten til en uendelig mengde uttrykker graden av uendelighet. Det er uendelig mange hele tall og det er uendelig mange reelle tall. De hele tallene kan telles, men de reelle tallene kan ikke telles. Kardinaliteten til de reelle tallene er større enn kardinaliteten til de hele tallene. Kontinuumshypotesen i mengdeteori sier at det ikke finnes en uendelighet strengt mellom disse to.

Eulersk og Lagrangesk beskrivelse

Det er to grunnleggende forskjellige måter å beskrive bevegelsen til et fluid, Eulersk og Lagrangesk.[2]

I Eulersk beskrivelse følger vi ikke individuelle partikler, men ser heller på feltbeskrivelse. Et eksempel er hastighetsfelt som funksjon av posisjon og tid $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

I Lagrangesk beskrivelse følger vi individuelle partikler. Posisjonen til en partikkel er $\boldsymbol{r}_p(t)$. Hastigheten til en partikkel er $\boldsymbol{v}_p(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p(t)}{\mathrm{d}t}$. Akselerasjonen til en partikkel er $\boldsymbol{a}_p(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p(t)}{\mathrm{d}t}$.

Disse to beskrivelsene må passe sammen, derfor har vi for eksempel

$$\boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t).$$

Strømlinjer og partikkelbaner

En fluid partikkel beveger seg langs en bane som vi angir ved posisjonsvektor som funksjon av tid $\boldsymbol{r}_p(t)$. For å finne banen kan vi løse differensiallikninga for hastigheten uttrykt som den tidsderiverte av posisjonen

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t).$$

En bane er en reise i rom og tid.

Tidligere har vi definert strømlinjer som kurver som er overalt tangent til vektorfeltet. Disse er løsninger av differensiallikninga som uttrykker at kurveelementet er tangent til (parallell med) hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Denne likninga er ikke entydig definert dersom hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ endrer seg i tid, derfor innser vi at strømlinjene er et øyeblikksbilde av vektorfeltet, ved fastholdt tid:

Strømlinjer er kurver som er tangent til vektorfeltet ved fastholdt tid.

Vi kan vise at dersom hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$, så er banene lik strømlinjene: Vi vet nemlig at en infinitesimal forflytning langs en bane er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Dersom vi krysser dette med feltet $\boldsymbol{v}$ får vi $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ og følgelig ser vi at kriteriet for strømlinjer er oppfylt av banene.

Dersom feltet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ ikke er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \neq \boldsymbol{0}$, så går banene ikke langs strømlinjene fordi øyeblikksbilder av feltet vil se forskjellige ut fra det ene øyeblikket til det andre.

[2] Joseph–Louis Lagrange (1736–1813)

Partikkelderivert, eller endring av en egenskap slik det observeres fra en partikkel som beveger seg langs en bane.

La $E(\boldsymbol{r}, t)$ være en skalar egenskap. Vi skal se på endringen av denne egenskapen, slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Det er to årsaker til at observatøren registrerer endring av egenskapen E, delvis fordi E endrer seg i tid på et gitt sted, og delvis fordi observatøren flytter seg til et annet sted hvor E har en annen verdi. Endringen i E på grunn av at partikkelen har endret sin posisjon $\Delta\boldsymbol{r}$ i løpet av tid Δt er

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Nå gjør vi samme knep som vi gjorde da vi utledet gradient og retningsderivert, vi ser på endringen med hensyn på bare tid, eller bare posisjon

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) + E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Vi har at

$$E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) \approx \frac{\partial E}{\partial t}\Delta t$$

og

$$E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) - E(\boldsymbol{r}, t) \approx \nabla E \cdot \Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \nabla E$$

og følgelig får vi

$$\Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial t}\Delta t + \Delta\boldsymbol{r} \cdot \nabla E.$$

Nå deler vi på Δt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \cdot \nabla E$$

og lar $\Delta t \to 0$. Hastigheten dukker da opp i andre ledd på høyre side $\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

På venstre side får vi nå en spesiell type tidsderivert av egenskapen E, nemlig den tidsderiverte slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Vi innfører derfor et spesielt symbol for å markere dette

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla E.$$

Det første leddet på høyre side kaller vi den lokalderiverte fordi det beskriver hvordan egenskapen endrer seg på et fastholdt sted og ikke avhenger av at fluidpartikkelen flytter på seg. Det andre leddet på høyre side kaller vi den konvektivt deriverte fordi det avhenger av forflytningen til fluidpartikkelen. Summen av disse kaller vi den partikkelderiverte.

Vi kan nå utvide beskrivelsen til en vektor egenskap $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ som vi kan sette rett inn i uttrykket ovenfor

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F}.$$

I dette uttrykket er det viktig å merke seg at prikk-produktet skal utføres mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, mens ∇-operatoren skal derivere $\boldsymbol{F}$. Uttrykket $\nabla\boldsymbol{F}$ medfører både derivasjon og multiplikasjon, denne multiplikasjonen kaller vi et "dyadisk produkt".

Partikkelakselerasjon

Med partikkelakselerasjon skal vi forstå akselerasjonen som en partikkel blir utsatt for mens den beveger seg langs sin bane

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Partikkelakselerasjonen er altså en sum av to bidrag som vi skal kalle lokal akselerasjon og konvektiv akselerasjon. I uttrykket for den konvektive akselerasjonen skal prikk-produktet utføres mellom ∇ og den hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$ som ikke skal deriveres.

Litt om dyadiske produkter

Vi skal notere dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\boldsymbol{ab}$. Andre bruker symbolet $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ som i praksis betyr det samme.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom α og β og γ er skalarer, og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c}) = \alpha\gamma\boldsymbol{ac} + \beta\gamma\boldsymbol{bc}$.

Det dyadiske produktet kommuterer ikke $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{bc} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{bc})$. I praksis sparer man en betydelig regne-innsats, både for hånd og på datamaskin, dersom man utfører prikk-operasjonen først, derfor bør man foretrekke å regne ut dette uttrykket som $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{bc} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

For å forstå det konvektive uttrykket $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F}$ på riktig måte skal vi forholde oss til et par konvensjoner som kan oppfattes som naturlige: Prikken skal virke mellom de første vektorene som dukker opp på hver side, og ∇ skal derivere mot høyre dersom ikke annet er oppgitt. Følgelig skal prikken virke mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, og ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$. Regnestykket gir samme svar uavhengig av om vi utfører prikk eller dyadisk produkt først $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{F})$. Her angir parentesen prioritet for multiplikasjon, mens ∇ uansett skal derivere $\boldsymbol{F}$. I praksis sparer man en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-produktet først, derfor bør man foretrekke å regne ut den konvektivt deriverte som $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$.

Advarsel:
Det som står på denne siden er forvirrende!
Det er ikke nødvendig å lese denne siden!

Alternativ konvensjon for gradienten til en vektor

Alle er enige om at dersom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er vektorer som ikke medfører derivasjon så kommer retningen til $\boldsymbol{a}$ før retningen til $\boldsymbol{b}$ i produktet $\boldsymbol{ab}$.

Dersom vi bytter ut $\boldsymbol{a}$ med ∇, som er både en vektor og en derivasjonsoperator, så finnes de som hevder at ettersom ∇ er en operator så skal retningen til ∇ komme etter retningen til $\boldsymbol{b}$ i uttrykket $\nabla\boldsymbol{b}$.

Dersom denne alternative konvensjonen benyttes, så må uttrykket for den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives enten

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}$$

eller

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\nabla\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{v}$$

Uansett skal prikken virke mellom ∇ og $\boldsymbol{v}$, mens ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$.

Vi innser at det er to gode grunner til å sette parentes rundt prikk-produktet $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$. Da forsvinner nemlig forskjellen mellom disse to konvensjonene, i tillegg til at man sparer en betydelig regne-innsats både for hånd og på datamaskin.

Vi innser også at vi må sjekke hvilken konvensjon en tekst forholder seg til:

Lærebøkene M og GF som brukes i MEK1100 bruker ikke det som her kalles "alternativ" konvensjon.

Læreboka LH som brukes i MAT1110 skriver Jacobi-matriser (matriser som svarer til gradienten av en vektor) på en måte som ser ut som den alternative konvensjonen. LH bruker imidlertid ikke ∇-symbolet for å operere på vektorer, de anvender ∇ kun på skalarfunksjoner, og de skriver notasjonen $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ for matrisen som svarer til gradienten av en vektor.

Med LH sin matrisenotasjon kan den partikkelderiverte av en vektor $\boldsymbol{F}$ skrives

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}$$

hvor både $\boldsymbol{F}$ og $\boldsymbol{v}$ er søylevektorer, hvor $\boldsymbol{F}'$ er en Jacobi-matrise, og hvor operasjonen som skal gjøres mellom $\boldsymbol{F}'$ og $\boldsymbol{v}$ er en matrisemultiplikasjon, dvs. en prikk-operasjon. LH skriver altså prikk for skalarprodukt mellom to vektorer, men ikke noe symbol for det som i praksis er en prikk-operasjon mellom en dyade og en vektor.

Bevaringslover generelt

I det følgende skal vi utlede diverse bevarlingslover. De tjener til å holde regnskap med hvor mye vi har av "noe" innenfor et kontrollvolum. Dersom det er en endring i mengden av dette "noe" innenfor kontrollvolumet så må det enten skyldes at det er en netto integrert fluks gjennom veggene til kontrollvolumet, eller det må skyldes at det skapes eller tilintetgjøres innenfor kontrollvolumet.

Det er tre grunnleggende forskjellige kontrollvolum som vi kan benytte:

1. En fluid partikkel som er en infinitesimal materiell partikkel som forflytter seg med fluidet.
2. Et fastholdt endelig kontrollvolum.
3. Et bevegelig endelig kontrollvolum som både kan deformeres og som kan bevege seg uavhengig av fluidet.

I MEK1100 skal vi kun bruke de to første typene kontrollvolum. For den tredje typen kontrollvolum trenger vi Reynolds transportteorem som hører til i videregående MEK-emner.

Bevaring av masse: Kontinuitetslikninga

Betingelsen for at masse er bevart kalles kontinuitetslikninga.

Anta vi har et fluid med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at fluidet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

I dette tilfellet skal vi betrakte et fastholdt endelig kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S. Vi stiller to krav til vårt kontrollvolum, det skal være *fastholdt* og det skal være *vilkårlig*. At kontrollvolumet er vilkårlig betyr at resultatene i det følgende gjelder uansett hvilken form eller størrelse kontrollvolumet har.

Den totale massen innenfor V er

$$M(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}\tau$$

Flukstettheten av masse er gitt ved $\rho\boldsymbol{v}$. Den integrerte fluksen ut gjennom den lukkede flaten S er

$$Q(t) = \int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor vi holder oss til konvensjonen at enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av kontrollvolumet.

Dersom det ikke skapes eller tilintetgjøres masse innenfor kontrollvolumet så må

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + Q = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på integrert form.

Vi kan ta den tidsderiverte av massen inn under integraltegnet, da blir den til en partiellderivert. Ettersom kontrollvolumet er fastholdt er det ikke bidrag fra tidsderivert av formen til kontrollvolumet

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

Vi kan benytte Gauss sats for å omgjøre fluksintegralet til et volumintegral

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, følgelig må integranden være lik null

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på differensial form.

Alternative former for kontinuitetslikninga

Dersom vi skriver ut divergensleddet får vi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dersom vi føyer sammen de to første leddene i likninga ovenfor kjenner vi igjen den partikkelderiverte

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Homogen tetthet

Dersom tettheten er lik overalt, $\nabla \rho = \boldsymbol{0}$, sies den å være *homogen*. I så fall reduserer kontinuitetslikninga seg til

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Stasjonær tetthet

Dersom tettheten ikke endrer seg i tid, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, sies den å være *stasjonær*. I så fall reduserer kontinuitetslikninga seg til at massefluksteттheten er divergensfri

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Spesialtilfelle: Konstant tetthet

Dersom tettheten er både homogen og stasjonær sier vi at den er *konstant*. I så fall må hastigheten være divergensfri og fluidet er inkompressibelt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Inkompressibelt fluid

Dersom fluidet er inkompressibelt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, så er den partikkelderiverte av tettheten lik null

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

NB! Dette betyr ikke at tettheten er konstant, men at tettheten til hver fluidpartikkel er bevart.

Forskjellen på væske og gass

Husk at innen kategorien "fluid" har vi underkategoriene "væske" og "gass". Hovedforskjellen mellom væske og gass er at ei væske er i praksis inkompressibel $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ mens en gass lett lar seg komprimere eller utvide $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$.

Eksempel: Vann strømmer gjennom en trakt

Vann er ei væske, så vi kan starte med kontinuitetslikninga for inkompressibelt fluid, nemlig at hastigheten er divergensfri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Denne kan vi integrere over et kontrollvolum V som er avgrenset av veggene i trakten S_T, et tverrsnitt S_A hvor vannet strømmer inn i trakten med fart v_A, og et tverrsnitt S_B hvor vannet strømmer ut av trakten med fart v_B. La oss anta at strømningshastigheten er vinkelrett på tverrsnittene A og B. Vi innser at det ikke er strømning gjennom traktveggen S_T. Med Gauss lov har vi

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = (\int_{S_T} + \int_{S_A} + \int_{S_B}) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = -\int_{S_A} v_A \, \mathrm{d}\sigma + \int_{S_B} v_B \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Dersom vi i tillegg antar at farten er konstant i hvert tverrsnitt så kan vi uttrykket resultatet ved arealene A og B

$$v_A A = v_B B$$

Følgelig ser vi at farten er størst i tverrsnittet som er minst.

Eksempel: Biltrafikk

Biltrafikk langs vei er et glimrende eksempel for å få innsikt i løsningene til kontinuitetslikninga. Vi ser for oss en motorvei eller landevei med én eller flere parallelle felt, "tverrsnittet" S er antall felt, "volumet" V er strekning ganger antall felt, "tettheten" er antall biler per volum. Trafikken er inkompressibel dersom avstanden til forankjørende alltid er den samme.

Vanligvis kan biltrafikk lett komprimeres, den oppfører seg da som en "gass". Dersom bilene holder konstant avstand, for eksempel i tett trafikk med kø, vil trafikken oppføre seg som en "væske".

En person som sitter i en bil kan lett uttale seg om trafikken er inkompressibel. En person som står ved siden av veien kan lett uttale seg om trafikken er stasjonær. En person i et helikopter eller på en nærliggende bakketopp kan lett uttale seg om trafikken er homogen.