MEK1100 forelesning 24, 22/4–2024 ved Karsten Trulsen

## Kontinuitetslikninga

Forrige gang utledet vi kontinuitetslikninga som beskriver bevaring av masse. Nå skal vi se et par eksempler på hvordan denne kan brukes for å beskrive trafikk langs veier.

Vi betrakter en vei med én eller flere parallelle felt. Veien har "tverrsnitt" $S$ lik antall felt. Veien har "volum" $V$ lik strekning ganger antall felt. Trafikken oppfører seg som et fluid med "tetthet" $\rho$ lik antall biler per volum. Trafikken er inkompressibel dersom avstanden til forankjørende alltid er den samme, da oppfører trafikken seg som en væske. I motsatt fall er trafikken kompressibel og oppfører seg som en gass.

**Eksempel: Inkompressibel trafikk som går fra mange felt til ett felt**

Vi betrakter to snitt, $A$ og $B$, med henholdsvis $n_A$ og $n_B$ felt, hvor trafikken beveger seg med hastighet henholdsvis $v_A$ og $v_B$. Inkompressibel trafikk betyr at hastighetsfeltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Kontinuitetslikninga sier dette er ekvivalent med $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$ som betyr at hvert kjøretøy holder konstant avstand til forankjørende. Integrasjon over et kontrollvolum langs veien, mellom de to snittene, gir $v_A n_A = v_B n_B$.

Dersom vi lar $n_A = 3$ og $n_B = 1$ får vi $v_B = 3v_A$. Trafikken vil gå raskere straks man kommer ut fra flerfelts vei og inn på ettfelts vei. Dette er typisk oppførsel når etterfølgende biler hele tiden holder samme avstand.

**Eksempel: Kompressibel trafikk med stasjonær biltetthet**

Stasjonær biltetthet, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, betyr at biltettheten ikke endrer seg i tid på et fastholdt sted. I henhold til kontinuitetslikninga er da bilflukstettheten divergensfri $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$. Integrasjon over et kontrollvolum langs veien, mellom to snitt $A$ og $B$, gir $\rho_A v_A A = \rho_B v_B B$.

La oss nå anta at den same trafikken holder fartsgrensene $v_A = 100$ km/h på trefelts motorvei $n_A = 3$, og $v_B = 80$ km/h på ettfelts landevei $n_B = 1$. I så fall har vi en relasjon for tetthetene $300\rho_A = 80\rho_B$. Dette er typisk oppførsel for trafikk som holder fartsgrensen i overgangen mellom flerfelts og ettfelts vei: Det er god plass mellom bilene på motorveien og tettere trafikk på landeveien.

## Eulers likning

### Bevaring av bevegelsesmengde — Newtons andre lov

Newtons andre lov sier at et legeme med masse $m$ som blir påvirket av en total kraft $\boldsymbol{F}$ vil få en akselarasjon $\boldsymbol{a}$ i henhold til likninga

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Vi skal se hvordan denne likninga kan omformuleres for anvendelse på et fluid.

### Eulers likning — Newtons andre lov for ideelt fluid

I virkeligheten er friksjon på grunn av viskositet viktig for bevegelsen til et fluid. I det følgende skal vi se bort fra viskositet og friksjon. Da sier vi at fluidet er *ideelt*. Likninga vi da ender opp med kalles Eulers likning.

Dersom vi hadde tatt med viskositet og friksjon hadde vi endt opp med Navier–Stokes likning. Dette gjøres i emnet MEK2200.

I det følgende begrenser vi oss til to typer krefter: trykkraft og tyngdekraft.

### Newtons andre lov anvendt på fluidpartikkel

I det følgende skal vi betrakte et kontrollvolum som er en fluidpartikkel. Dette er et infinitesimalt materielt kontrollvolum som beveger seg i henhold til fluidet.

La fluidpartikkelen ha masse $m$, volum $V$, tetthet $\rho = \frac{m}{V}$, hastighet $\boldsymbol{v}$, akselerasjon $\boldsymbol{a}$, og være avgrenset av overflate $S$.

Vi antar i tillegg at fluidpartikkelen er del av et kontinuerlig medium med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at mediet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. I så fall vet vi at relasjonen mellom partikkelakselerasjonen og fluidhastigheten er $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$.

Summen av alle krefter som virker på fluidpartikkelen er gitt ved trykkraft og tyngdekraft

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi starter med Newtons andre lov (1)

$$m\boldsymbol{a} = -\int_S p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

og benytter uttrykket for partikkelderivert på venstre side, og benytter Gauss sats på høyre side, så får vi

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right) = -\int_V \nabla p \,\mathrm{d}\tau + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi nå husker at fluidpartikkelen er infinitesimal, så innser vi at integranden i volumintegralet er i praksis konstant over volumet $V$, så volumintegralet er lik integranden multiplisert med volumet $V$. Vi deler på $m$ og bruker at $\rho = \frac{m}{V}$ og får Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

**Likningssystemet så langt**

Så langt har vi kontinuitetslikninga som ei skalar likning, og Eulers likning som er ei vektor likning med tre komponenter, det gir tilsammen fire likninger.

De ukjente er de to skalarene trykk og tetthet, og hastigheten som har tre komponenter. Det er tilsammen fem ukjente.

Vi mangler ei likning. Det er tilstandslikninga til fluidet. Vi skal ikke diskutere generelle tilstandslikninger her, men vi skal heller begrense oss til å kreve at fluidet er inkompressibelt eller at tettheten er konstant. Dermed har vi tilsammen fem likninger i fem ukjente.

Generelt er disse likningene vanskelig å løse for hånd. Vi skal her vise noen enkle eksempler for å finne trykket dersom vi antar at tettheten er konstant og at hastighetsfeltet er kjent.

**Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, hydrostatisk trykk**

Tettheten er konstant. Hastigheten er null. Kontinuitetslikninga er identisk oppfylt. Eulers likning reduserer seg til

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

Dersom vi antar at $z$-aksen peker oppover, så har vi $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, og vi får på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Dersom tettheten er konstant har vi løsningen

$$p = -\rho g z + c$$

hvor $c$ er en konstant. Dette er formelen for hydrostatisk trykk.

**Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm**

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v(z)\boldsymbol{i}$$

hvor $\frac{\partial v}{\partial z} > 0$.

Med konstant tetthet er kontinuitetslikninga identisk oppfylt.

Hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. For å finne den konvektive akselererasjonen starter vi med $\boldsymbol{v} \cdot \nabla = v(z)\frac{\partial}{\partial x}$, og deretter $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = v(z)\frac{\partial v(z)}{\partial x}\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$. Følgelig vet vi at vi har verken lokal eller konvektiv akselerasjon, og vi står igjen med kun to ledd i Eulers likning

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

Dette er nøyaktig det samme som vi hadde for stillestående fluid, vi ender altså opp med hydrostatisk trykk

$$p = -\rho g z + c$$

Dette er egentlig et pussig resultat: Vi har hydrostatisk trykk i et fluid som på ingen måte står i ro.

**Eksempel: Rotasjon som stivt legeme**

Dette kan kanskje være en modell for bevegelsen i en kopp hvor vi rører rundt med ei skje?

Vi bruker polare koordinater $\{R, \theta, z\}$ med $z$-aksen vertikalt opp i sentrum av koppen og med $R$ som radiell avstand fra $z$-aksen. Posisjonsvektor er $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{k}$.

La vinkelhastigheten være $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. Hastighetsfeltet er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega R\boldsymbol{i}_\theta.$$

Med konstant tetthet er kontinuitetslikninga identisk oppfylt.

Hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$. For å finne den konvektive akselerasjonen starter vi med $\boldsymbol{v} \cdot \nabla = \omega R \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$, og deretter $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}(\omega R\boldsymbol{i}_\theta) = -\omega^2 R\boldsymbol{i}_R$. Eulers likning blir

$$-\omega^2 R\boldsymbol{i}_R = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k}$$

Dette gir oss tre likninger for å bestemme trykket

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \rho\omega^2 R$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

og vi finner trykket

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g z + c$$

Vi kan nå bestemme konstanten $c$ ved hjelp av et overflatekrav. Vannet i koppen har en fri overflate i kontakt med luft ved høyden $z = \eta(R)$. Her må trykket være lik det konstante lufttrykket $p_0$. Vi setter dette inn i trykklikninga ovenfor og får

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g\eta(R) + c$$

Dersom vi i tillegg bestemmer at den frie overflaten skal skjære $z$-aksen ($R = 0$ i origo, så må $c = p_0$. Vi finner derfor at formen til den frie overflaten er en paraboloide

$$z = \eta(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Når du rører rundt vann i en kopp så vil trykket i vannet være minst nær rotasjonsaksen. Lufta vil derfor lett skyve bort vann fra midten av koppen og det danner seg en fordypning i vannoverflaten midt i koppen.