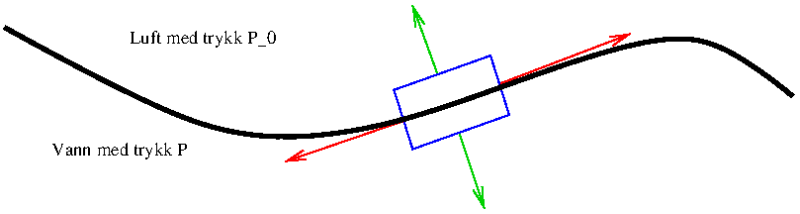
MEK1100 forelesning 25, 24/4–2024 ved Karsten Trulsen

Grensebetingelse for trykk der hvor vann møter luft

Vi skal se litt nærmere på betingelsen for trykk på grenseflaten hvor vann er i kontakt med luft. Vi skal gjøre dette ved hjelp av et passende kontrollvolum, en rektangulær boks som vi lar strekke seg langs grenseflaten slik at den ene siden av kontrollvolumet er i luft og den andre siden er i vann. Se figuren hvor grenseflaten er markert i sort og kontrollvolumet er markert i blått. Normalvektorene til kontrollvolumet kan enten være normalt på grenseflaten markert i grønt, eller tangent til grenseflaten markert i rødt.



Krefter som virker langs overflaten kalles overflatespenning. Disse kreftene sørger blant annet for at insekter kan gå på vannoverflaten. Vi kan kalle summen av disse kreftene $\boldsymbol{F}_S$. Vi skal ikke diskutere overflatespenning i MEK1100. Vi kommer derfor til å se bort fra krefter som virker langs de røde pilene.

La de to sidene med grønn normalvektor ha areal A og la enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peke fra vann mot luft. La trykket i lufta være p_0 og trykket i vannet være p. Den totale trykkrafta på kontrollvolumet vil være $\boldsymbol{F}_A = (p - p_0)A\boldsymbol{n}$. Fluidet inni kontrollvolumet har masse m som blir trukket nedover av tyngdekrafta $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$. Den totale krafta på kontrollvolumet blir $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_g$.

Newtons andre lov for kontrollvolumet sier at akselerasjon $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ hvor $\boldsymbol{a}$ er akselerasjonen til kontrollvolumet. Etter at vi ser bort fra overflatespenning, $\boldsymbol{F}_S = \boldsymbol{0}$, står vi igjen med

$$m\boldsymbol{a} = (p - p_0)A\boldsymbol{n} + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi nå lar tykkelsen på kontrollvolumet gå mot null, slik at massen går mot null, samtidig som vi insisterer på at kontrollvolumet ikke skal ha uendelig akselerasjon, så innser vi at trykket må være kontinuerlig på grenseflaten mellom vann og luft:

$$p = p_0 \qquad \text{der hvor vann møter luft}$$

NB! Dersom vi hadde tatt hensyn til overflatespenning ville vi fått en trykkforskjell mellom vann og luft avhengig av krumningen til overflaten.

Eksempel: Trykket i stillestående vann som er i kontakt med luft
Vi har tidligere utledet formelen for hydrostatisk trykk

$$p = -\rho g z + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant. La oss si at vannoverflaten befinner seg ved $z = z_0$, da blir grensebetingelsen $p_0 = -\rho g z_0 + c$ og vi kan bestemme c. Det hydrostatiske trykket blir

$$p = p_0 - \rho g(z - z_0) \qquad \text{for} \qquad z \le z_0$$

Eksempel: En mer generell rotasjonsbevegelse i vann

Vi så tidligere på en væske som roterer som et stivt legeme, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega R \boldsymbol{i}_\theta$, som har hastighet proporsjonal med radius R fra rotasjonsaksen. Nå skal vi se på en mer generell roterende bevegelse

$$\boldsymbol{v} = \omega R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \boldsymbol{i}_\theta$$

som har hastighet proporsjonal med radius opphøyet i n-te potens av radius R fra rotasjonsaksen. Eksponenten n kan være hva som helst. Rotasjon som fast legeme svarer til $n = 1$. Rotasjonen har vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ i radius R_0 fra rotasjonsaksen.

La oss finne partikkelakselerasjonen. Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$. For å finne den konvektivt deriverte starter vi med

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla = \omega \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

og har deretter

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \omega \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\omega R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \boldsymbol{i}_\theta\right) = -\omega^2 R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n-1} \boldsymbol{i}_r$$

Eulers likning blir

$$-\omega^2 R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n-1} \boldsymbol{i}_r = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k}$$

Dette gir oss tre likninger for å bestemme trykket

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 R_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n-1}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Når $n \neq 0$ finner vi trykket

$$p = \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2n} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{2n} - \rho g z + c$$

For $n = 0$ finner vi

$$p = \rho\omega^2 R_0^2 \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - \rho g z + c$$

Vi kan bestemme den vilkårlige konstanten c ved kravet at trykket i vannet skal være lik lufttrykket på overflaten $z = \eta(R)$.

Det er interessant å undersøke hvordan formen på overflaten $z = \eta(R)$ avhenger av radiell avstand fra rotasjonsaksen R. For $n \neq 0$ oppfører $\eta(R)$ seg som R^{2n}. For $n = 0$ oppfører $\eta(R)$ seg som $\ln R$. Dette betyr at vi kan bestemme potensen n ved å se på formen til vannoverflaten!

Prøv å tegn $\eta(R)$ for $n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}, -1$!

Ut fra vår dagligdagse erfaring kan det se ut som om $n = 1$ når vi rører rundt i en kopp med vann, mens $n < 0$ når vi trekker ut proppen i en vask etter å ha rørt rundt i vannet?

Bernoullis likning

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

Vi skal nå forsøke å skrive om så mye som mulig av denne vektorlikninga som en gradient, for derved å kunne integrere den opp til en skalarlikning:

Leddet med tyngdens akselerasjon kan skrives $\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$.

Vi antar at hastighetsfeltet er stasjonært, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.

Vi antar at tettheten er konstant slik at vi kan skrive $\dfrac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\dfrac{p}{\rho}\right)$.

Det konvektivt akselererte leddet kan vi skrive om ved hjelp av identitetene

$$(\nabla \times \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} - \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\nabla(\overbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}^{\downarrow}) = \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v} \cdot \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} = \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = 2\nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}$$

og følgelig

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

hvor vi har introdusert $\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ for virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

Nå kan vi samle alle gradient-ledd under felles gradient-symbol

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \boldsymbol{0}$$

Vårt mål er nå å kvitte oss med det ene leddet som ikke er en gradient. Dette gjør vi ved å prikke med et infinitesimalt kurveelement $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ langs en strømlinje. Husk at strømlinjer er definert ved likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi får

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Vi står igjen med

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla \mathcal{B} = \mathrm{d}\mathcal{B} = 0$$

hvor

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

og følgelig har vi Bernoullis likning

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

La oss oppsummere betingelsene for Bernoullis likning:

1. Ideelt fluid — ingen friksjon (viskositet)
2. Stasjonært hastighetsfelt
3. Konstant tetthet

Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, er det ikke nødvendig at kurveelementet d$\boldsymbol{r}$ er langs en strømlinje, og vi får at uttrykket for $\mathcal{B}$ er lik den samme konstanten overalt.

Dersom hastighetsfeltet har virvling kan konstanten være forskjellig fra én strømlinje til en annen. Problemet med Bernoullis likning er da at den ikke forteller oss hvordan konstanten endrer seg fra én strømlinje til en annen. Det er viktig å være klar over dette så vi ikke bruker Bernoullis likning i utide. Følgende eksempler illustrerer dette:

Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
For stillestående fluid har vi at virvlinga er null, og Bernoullis likning reduserer seg til den hydrostatiske trykkformelen

$$p = -\rho g z + c$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

I dette tilfellet er det ingen virvling, så konstanten er den samme overalt.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm
Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v(z)\boldsymbol{i}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{j}$, og vi kan derfor regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er i dette tilfellet rette linjer parallell med bakken. Bernoullis likning forteller oss derfor kun at trykket er konstant i en gitt høyde over bakken. Dette er egentlig ikke et spennende resultat.

Vi vet fra tidligere at trykket i dette tilfellet er hydrostatisk, men Bernoullis likning er ikke i stand til å fortelle oss det!

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme
Anta vi rører rundt i en kopp slik at vannet beveger seg som et stivt legeme

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega R \boldsymbol{i}_\theta$$

Bernoullis likning sier

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 R^2}{2} + gz = \text{konstant} \ldots$$

Dersom vi ser tilbake på forrige forelesning kan det nå se ut som om det midterste leddet på venstre side har feil fortegn? Det har imidlertid ikke feil fortegn!

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Derfor kan vi regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er sirkler i horisontale plan med sentrum i rotasjonsaksen. Bernoullis likning forteller kun at trykket er konstant langs en slik sirkel. Dette er ikke et spennende resultat.

Legg spesielt merke til at Bernoullis likning i dette tilfellet ikke forteller oss at overflaten har formen til en paraboloide som krummer opp!

Eksempel: En mer generell rotasjonsbevegelse i vann

Nå er det nærliggende å spørre om vi kan velge potensen n slik at den mer generelle rotasjonsbevegelsen i vann er virvelfri, slik at vi kan bruke Bernoullis likning til noe mer enn bare langs strømlinjer. Vi regner derfor ut virvlingen

$$\nabla \times (R^n \boldsymbol{i}_\theta) = (n+1)R^{n-1}\boldsymbol{k}$$

Hastighetsfeltet er virvelfritt dersom $n = -1$. Dette er den eneste potensen som tillater å bruke Bernoullis likning med felles konstant overalt. Hastighetsfeltet er da

$$\boldsymbol{v} = \frac{\omega R_0^2}{R}\boldsymbol{i}_\theta$$

og Bernoullis likning sier

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\omega^2 R_0^4}{2R^2} + gz = c$$

hvor c er samme konstant overalt. Vi kan løse for trykket

$$p = -\frac{\rho\omega^2 R_0^4}{2R^2} - \rho g z + \rho c$$

som er samme resultat som vi tidligere fant direkte fra Eulers likning.

Den frie overflaten $z = \eta(R)$ vil ha formen

$$\eta(R) = \alpha - \frac{\omega^2 R_0^4}{2gR^2}$$

hvor α er en konstant.