MEK1100 forelesning 27 den 6/5–2024 ved Karsten Trulsen

Kelvins sirkulasjonsteorem

Først et lite sidesprang: Bevaring av angulært moment

NB! Dette lille sidespranget er ikke pensum i MEK1100!

De som har tatt et introduksjonskurs i mekanikk har kanskje hørt om loven for bevaring av angulært moment: En punktmasse m som beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}$ i posisjon $\boldsymbol{r}$ relativt til et referansepunkt (origo) sies å ha angulært moment $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ relativt til referansepunktet. Dersom det virker en kraft $\boldsymbol{F}$ på punktmassen sier vi den er utsatt for et dreiemoment $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ rundt referansepunktet. Det angulære momentet endrer seg i tid i henhold til dreiemomentet $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$. Når dreiemomentet er null vil det angulære momentet være bevart $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$.

Dette benytter for eksempel balettdansere seg av. Ved å redusere på radius av en rotasjonsbevegelse kan de oppnå stor rotasjonshastighet: Balettdanser som gjør piruett på skøyter

Nok et lite sidesprang: Leibniz regel for å derivere et integral

NB! Dette lille sidespranget er heller ikke pensum i MEK1100!

Denne nyttige formelen ser ikke ut til å stå, i hvert fall ikke i stikkordregisteret, i lærebøkene til MAT1100 eller MAT1110? Formelen kalles Leibniz regel for å derivere et integral:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t$$

Poenget er bare at dersom både grensene og integranden avhenger av x så må både grensene og integranden deriveres med hensyn på x.

Utledning av Kelvins sirkulasjonsteorem

Vi skal betrakte en lukket kurve λ som avgrenser en flate σ og hvor både kurven og flaten i sin helhet ligger i et fluid. Sirkulasjonen rundt den lukkede kurven er

$$C = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Nå skal vi betrakte en *materiell* lukket kurve $\lambda(t)$.[1] Det vil si at den lukkede kurven alltid utgjøres av de samme fluid partiklene som beveger seg med fluidets hastighetsfelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$. Den lukkede materielle kurven vil således kunne flytte på seg og bli deformert.

Sirkulasjonen rundt den materielle lukkede kurven $\lambda(t)$ er en funksjon av tid

$$C(t) = \oint_{\lambda(t)} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

[1] Det går også an å studere lukkede kurver $\lambda(t)$ som ikke er materielle, men det gir ikke like interessante resultater.

Vi ønsker å studere hvordan sirkulasjonen rundt den materielle lukkede kurven endrer seg i tid, vi ønsker altså å beregne $\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$. Et lite blikk tilbake på Leibniz regel antyder at vi må derivere både kurven og integranden med hensyn på tid.

Nå skal vi benytte et lite knep for å unngå å måtte derivere kurven direkte: La den materielle kurven ved en vilkårlig tid t være parametrisert ved kurven ved en referansetid t_0. Punktene langs kurven $\lambda(t)$ er følgelig gitt ved en avbildning $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$ hvor $\boldsymbol{\xi}$ løper rundt den lukkede referansekurven $\lambda(t_0)$. For å utføre derivasjonen kan vi derfor begrense oss til å derivere kun integranden.

Konsekvensen av parametriseringen beskrevet i forrige avsnitt er at når den tidsderiverte kommer innenfor integraltegnet så blir det en partikkelderivert som følger partiklenes bevegelser i hastighetsfeltet. Vi får

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \oint_\lambda \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right) = \oint_\lambda \left\{\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\right\}$$

I formelen over er differensialet "$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$" langs kurven ved en fastholdt tid, mens de tidsderiverte under integraletegnet er partikkelderiverte $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ som følger bevegelsen til fluidpartiklene.

Det siste leddet under integraltegnet bidrar ikke

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t} = \oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \oint \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

Vi har nå utledet relasjonen

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \oint_\lambda \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Nå skal vi benytte Eulers likning

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$$

Her står $\boldsymbol{f}$ for fjernkrefter. Et eksempel er tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ for z-aksen orientert oppover. Dette gir

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \oint_\lambda \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_\lambda \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \oint_\lambda \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Dersom fjernkreftene kan representeres ved et skalarpotensial Φ, for eksempel $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} = \nabla(-g\boldsymbol{k})$ forsvinner det siste integralet

$$\oint_\lambda \nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\lambda \mathrm{d}\Phi = 0$$

fordi kurven λ er lukket.

Dersom fluidet er barotropt, det vil si at tettheten er kun en funksjon av trykket, $\rho = \rho(p)$, forsvinner det første integralet

$$\oint_\lambda \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = 0$$

nok en gang fordi kurven λ er lukket. Et eksempel på barotropt fluid er konstant tetthet $\rho =$ konstant.

Dermed har vi utledet Kelvins sats, nemlig at under disse forutsetningene er sirkulasjonen rundt en lukket materiell kurve bevart

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Prøv å se for deg at Kelvins sats sier i praksis det samme for et fluid som bevaring av angulært moment sier for punktmasser!

Anvendelser av Kelvins sats

Vi har sett at dersom vi rører rundt i en vask eller et badekar, og trekker ut proppen, vil rotasjonen til fluidpartiklene gå fortere jo lenger inn mot utløpet de kommer. Dette er i henhold til Kelvins sats. Det vi betrakter her er altså asimutalhastigheten til den samme partikkelen etterhvert som den nærmer seg sluket.

I eksperiment "Toricelli" så vi både på fluid som renner rett ned og fluid som først røres rundt før det renner ned. I det første tilfellet rant vannet rett ned gjennom sluket. I det andre tilfellet sprutet vannet ut til alle kanter når det gikk ut under sluket. Dette er en konsekvens av at rotasjonshastigheten var stor i utløpet.

Skypumper (tornadoer) tiltrekker seg sirkulerende luft til et tynt rør hvor lufta stiger, der vil rotasjonshastigheten være svært stor (se illustrasjon i GF).

Til slutt noe som i utgangspunktet ikke er en anvendelse av Kelvins sats:

Betrakt den roterende strømningen i en kopp som det har blitt rørt rundt i. La oss forestille oss at alle fluidpartiklene går rundt i sirkelbaner; de går rundt i de samme lukkede materielle kurver hele tiden. Disse materielle kurvene vil ikke endre seg. Følgelig sier ikke Kelvins sats oss noen ting.

Men la oss se litt nøyere på hva som skjer dersom vi rører rundt i en kopp med te hvor det er noen løse teblader: De vil samle seg på bunnen i midten av koppen! Dette skyldes et sekundært strømningsmønster som ser ut til å ha en torus-liknende geometri. I så fall vil fluidpartiklene ikke gå rundt i sirkelbaner, de materielle kurvene vil endre på seg, og Kelvins sats vil kunne si noe interessant. Dette fenomenet avhenger imidlertid av viskøs friksjon, som vi ikke diskuterer i MEK1100; Eulers likning må da byttes ut med Navier–Stokes likning!

Divergens- og virvelfrie felt: Laplace-likningen

(kap. 9 i Gjevik og Fagerland)

Svært ofte støter man på situasjoner der et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ er både divergensfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

og virvelfritt

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Vi skal nå se at dette naturlig leder til at feltet er beskrevet av Laplace-likningen.

Beskrivelse med skalarpotensial

Dersom et felt er virvelfritt $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ så vet vi at det eksisterer et skalarpotensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Dersom feltet i tillegg er divergensfritt får vi $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$, altså Laplace-likningen

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{3}$$

I kartesiske koordinater $\{x, y, z\}$ har vi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

i sylinderkoordinater $\{R, \theta, z\}$ har vi

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

og i kulekoordinater $\{r, \theta, \varphi\}$ har vi

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{6}$$

Beskrivelse med vektorpotensial

Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ så eksisterer det et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.[2] Dersom feltet i tillegg er virvelfritt får vi

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = 0$$

I utgangspunktet har vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$ tre skalarkomponenter, like mange som feltet $\boldsymbol{v}$. Imidlertid vil kravet om at feltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, pålegge én skalar betingelse på komponentene til $\boldsymbol{v}$, slik at feltet $\boldsymbol{v}$ egentlig bare har to uavhengige skalare komponenter. I så fall trenger ikke vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$ ha mer enn to uavhengige komponenter. Vi har dermed frihet til å pålegge én tilleggsbetingelse på komponentene til $\boldsymbol{A}$. Dette kalles å velge "gauge". Et naturlig valg kan være å

[2] Eksistensen av vektorpotensialet forklares ikke i lærebøkene i MEK1100. GF kap. 4.5 begrenser seg til å si at dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ så er $\boldsymbol{v}$ divergensfritt. Implikasjonen går imidlertid også den andre veien!

pålegge at vektorpotensialet skal være divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, dette kalles Coulomb "gauge". I så fall forenkles likningen for vektorpotensialet til Laplace-likningen på vektorform

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

NB! Her virker altså Laplace-operatoren på vektorfeltet $\boldsymbol{A}$, da gjelder ikke likningene (5) og (6) for de skalare komponentene til $\boldsymbol{A}$ i krumlinjede koordinater!

Beskrivelse med strømfunksjon

Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og 2D så eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at $\boldsymbol{v}$ kan uttrykkes ved strømfunksjonen. Dersom vi feltet er 2D i xy-planet ($\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \boldsymbol{0}$) kan feltet beskrives ved et vektorpotensial som har strømfunksjonen som komponent i z-retning, $\boldsymbol{A} = -\psi(x, y)\boldsymbol{k}$ slik at vektorfeltet i kartesiske koordinater blir

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

og i plane polarkoordinater (husk hvordan vi beregner virvling i sylinderkoordinater)

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times (-\psi \boldsymbol{k}) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_r & r\boldsymbol{i}_\theta & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\psi \end{vmatrix} = -\frac{\boldsymbol{i}_r}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Dette vektorpotensialet er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, det vil si Coulomb "gauge", og følgelig ser vi at strømfunksjonen må oppfylle den to-dimensjonale Laplace-likningen, $\nabla^2 \psi = 0$. Dette ser vi fordi enhetsvektoren i z-retning er konstant.

Vi har da i kartesiske koordinater $\{x, y\}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

og i plane polarkoordinater $\{r, \theta\}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{9}$$

2D divergens- og virvelfrie felt i xy-planet, Cauchy–Riemanns likninger

I det følgende skal vi stort sett begrense oss til felt av typen $\boldsymbol{v} = v_x(x, y)\boldsymbol{i} + v_y(x, y)\boldsymbol{j}$ eller $\boldsymbol{v} = v_r(r, \theta)\boldsymbol{i}_r + v_\theta(r, \theta)\boldsymbol{i}_\theta$. Ettersom vi kan velge om vi ønsker å representere feltet med et potensial eller en strømfunksjon, så må det være en relasjon mellom disse, nemlig

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

eller i plane polarkoordinater

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Disse likningene kalles Cauchy–Riemanns likninger i henholdsvis kartesiske eller polare koordinater.