MEK1100 forelesning 28 den 8/5–2024 ved Karsten Trulsen

Divergens- og virvelfrie felt

(kap. 9 i Gjevik og Fagerland)

Vi fortsetter med å studere vektorfelt $\boldsymbol{v}$ som er både divergensfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

og virvelfritt

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Slike felt kan beskrives av et skalarpotensial ϕ som tilfredsstiller Laplace likning

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \qquad \text{og} \qquad \nabla^2\phi = 0.$$

Slike felt kan også beskrives av et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ som tilfredsstiller Laplace likning dersom vektorpotensialet er divergensfritt (tilfredsstiller Coulomb gauge)

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} \qquad \text{og} \qquad \nabla^2\boldsymbol{A} = 0 \qquad \text{dersom} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0.$$

Begrenset til 2D kan slike felt også beskrives av en strømfunksjon ψ som tilfredsstiller Laplace likning. For eksempel, dersom feltet er begrenset til xy-planet med $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \boldsymbol{0}$ kan vi introdusere strømfunksjonen ψ som z-komponenten til et vektorpotensial $\boldsymbol{A} = -\psi(x, y)\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times (-\psi(x, y)\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi \qquad \text{og} \qquad \nabla^2\psi = 0$$

Cauchy–Riemanns likninger

Dersom vi nå begrenser oss til et to-dimensjonalt felt kan vi altså representere det med både et skalarpotensial ϕ og en strømfunksjon ψ. Det må nødvendigvis være en relasjon mellom disse to representasjonene, denne relasjonen beskrives av Cauchy–Riemanns likninger.

I kartesiske (x, y)-koordinater har vi $\boldsymbol{v} = v_x(x, y)\boldsymbol{i} + v_y(x, y)\boldsymbol{j}$, og Cauchy–Riemanns likninger er

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

I plane polare (r, θ)-koordinater har vi $\boldsymbol{v} = v_r(r, \theta)\boldsymbol{i}_r + v_\theta(r, \theta)\boldsymbol{i}_\theta$, og Cauchy–Riemanns likninger er

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Strømlinjer og ekvipotensialflater står normalt på hverandre

Ekvipotensialflater er gitt ved $\phi =$ konstant. Normalvektorene er gitt ved $\nabla\phi$.

I det to-dimensjonale tilfellet hvor vi har en strømfunksjon er strømlinjer gitt ved $\psi =$ konstant. Normalvektorene er gitt ved $\nabla\psi$. I dette tilfellet kan vi vise at $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$ med hjelp av Caucy–Riemanns likninger,

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Øvelse: Sjekk at du får samme resultat ved å bruke polarkoordinater.

I det tre-dimensjonale tilfellet har vi ikke en strømfunksjon. I så fall bruker vi heller den opprinnelige definisjonen på strømlinjer, $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$, altså $\boldsymbol{v}$ er parallell med strømlinjene. Vi har i tillegg at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, normalvektor til ekviskalarflatene er parallell med strømlinjene, altså står strømlinjene normalt på ekviskalarflatene.

NB! OBS! I et stagnasjonspunkt, hvor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, er begge de to resonnementene ovenfor trivielt oppfylt selv om strømlinjene ikke står normalt på ekviskalarflatene! Strømlinjene trenger ikke stå normalt på ekvipotensialflatene i stagnasjonspunkt!

Et enkelt eksempel

La oss studere feltet $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$.

Vi ser at feltet er divergens- og virvelfritt, derfor eksisterer det både en strømfunksjon og et skalarpotensial

$$\psi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

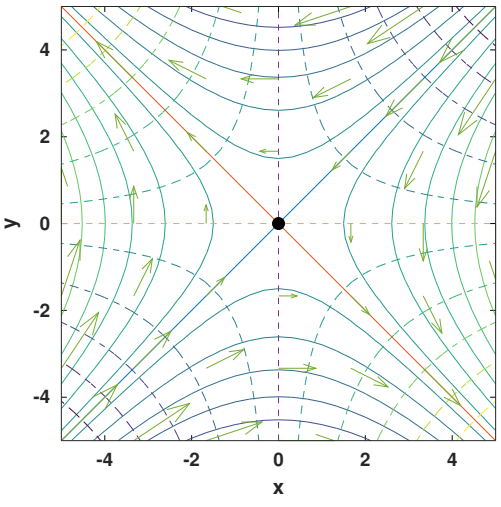
og

$$\phi = -xy$$

Det er et stagnasjonspunkt i origo.

I figuren har vi markert stagnasjonspunktet i origo. Strømlinjer er markert som heltrukne kurver. Ekvipotensialkurver er markert som stiplede kurver. Piler viser strømretningen, og lengden av pilene viser styrken til strømretningen.

NB! Legg merke til at de heltrukne og de stiplede kurvene skjærer hverandre med rett vinkel overalt unntatt i stagnasjonspunktet!



Superposisjonsprinsippet

Laplace likning og likningene for divergensfrihet og virvelfrihet er lineære. Følgelig gjelder superposisjonsprinsippet: La ϕ_1 og ϕ_2 oppfylle Laplace likning og la a og b være vilkårlige konstanter, da oppfyller $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ også Laplace-likning, $\nabla^2\phi = \nabla^2(a\phi_1 + b\phi_2) = a\nabla^2\phi_1 + b\nabla^2\phi_2 = 0$.

Vi kan benytte superposisjonsprinsippet til å konstruere "kompliserte" løsninger av Laplace likning ved å sette sammen "enkle" løsninger.

Laplace likning kan i utgangspunktet være vanskelig å løse fordi den er en partiell differensiallikning. Vi kan redusere den til en ordinær differensiallikning dersom vi antar at potensialet eller strømfunksjonen kun avhenger av én koordinat om gangen. Vi lar dette være vår definisjon av en "enkel" løsning.

Eksempler på "enkle" løsninger:

Rettlinjet strøm

Anta $\phi = \phi(x)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$ som har løsning $\phi = Ax + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = A = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -Ay + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i}$.

Øvelse: Gjør dette også med antakelsene $\phi = \phi(y)$, $\psi = \psi(x)$ og $\psi = \psi(y)$.

Kilde/sluk

Anta $\phi = \phi(r)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$ som har løsning $\phi = A\ln r + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -A\theta + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_r$. Vi kan si at dette er feltet til en "kilde" dersom $A > 0$ eller til et "sluk" dersom $A < 0$. Det er altså origo som er selve kilden eller sluket. For å angi "styrken" til kilden eller sluket kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo.

Øvelse: Vis at den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Punktvirvel

Anta $\phi = \phi(\theta)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$ som har løsning $\phi = A\theta + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{A}{r} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

som gir $\psi = A \ln r + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta$. Vi kan si at dette er feltet til en "punktvirvel" i origo. For å angi "styrken" til punktvirvelen kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo.

Merk: Vektorfeltet til punktvirvelen er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, overalt bortsett fra i origo hvor feltet er singulært.

Øvelse: Vis at sirkulasjonen rundt en slik sirkel er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Øvelse: Finn de "enkle" løsningene som framkommer ved å anta $\psi = \psi(r)$ og $\psi = \psi(\theta)$.

Eksempler på superposisjon av enkle løsninger:

Superposisjon av to rettlinjede strømninger

La $\phi_1 = x$ og $\phi_2 = y$. Dette tilsvarer $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{j}$. Dette er rettlinjede strømninger med enhets styrke i x- og y-retning.

Superposisjonen $\phi = A\phi_1 + B\phi_2$ gir $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ som er en vilkårlig sterk strømning i vilkårlig retning avhengig av koeffisientene A og B.

Superposisjon av kilde og punktvirvel i samme punkt

La $\phi_1 = \ln r$ og $\phi_2 = \theta$. Dette tilsvarer $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{r}\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{r}\boldsymbol{i}_\theta$. Dette er en kilde med enhets styrke og en punktvirvel med enhets styrke, begge lokaliert i origo.

Superposisjonen $\phi = A\phi_1 + B\phi_2$ gir $\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_r + \frac{B}{r}\boldsymbol{i}_\theta$ som er en vilkårlig sterk spiralkilde-strømning avhengig av koeffisientene A og B.

Se illustrasjon i GF figur 9.11.

Superposisjon av kilde og sluk i forskjellige punkter

La $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ være to punkter og la $\boldsymbol{r}$ være posisjonsvektor. La $\phi_1 = \ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|$ og $\phi_2 = -\ln|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}|$. Dette er en kilde i punktet $\boldsymbol{a}$ og et sluk i punktet $\boldsymbol{b}$, begge med enhets styrke.

Superposisjonen $\phi = \phi_1 + \phi_2$ gir en strømning som går fra kilden i $\boldsymbol{a}$ til sluket i $\boldsymbol{b}$.

Superposisjon av to punktvirvler som beveger seg i feltet til hverandre

Dersom de roterer samme vei så vil de gå i ring rundt hverandre.

Dersom de roterer motsatt vei så vil de bevege seg som et par i retning normalt på aksen mellom punktvirvlene.

Se illustrasjon i GF figur 9.8.

Øvelse: Still deg opp på en gangvei over din favoritt elv/bekk og studer strømningsmønsteret. Det er enklere å se dersom det er litt skum eller støv på vannoverflaten. Legg merke til hvordan vannoverflaten ser ut til å krumme nær punktvirvler. Legg merke til hvordan punktvirvler ser ut til å bevege seg i feltet til hverandre.