MEK1100 forelesning 29 den 13/5–2024 ved Karsten Trulsen

Aerodynamisk løft

Bruk av divergens- og virvelfrie felt sammen med Bernoullis likning

(kap. 9 og 10 i Gjevik og Fagerland)

Vi skal bruke superposisjonsprinsippet for å sette sammen "enkle" løsninger til en mer komplisert løsning for å beskrive strømningen rundt en sylinder (en sirkel i planet) med størst strømningshastighet på oversiden og minst strømningshastighet på undersiden.

Vi skal benytte følgende "enkle" løsninger som vi allerede har funnet som løsninger av Laplace likning forrige gang:

Konstant strøm i x-retning

Strømingen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$ kan beskrives med et potensial $\phi = \phi(x)$ eller en strømfunksjon $\psi = \psi(y)$ i henhold til Cauchy–Riemanns likninger

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

som gir $\phi = x$ og $\psi = -y$.

Kilde/sluk i origo

Strømningen $\boldsymbol{v} = \pm\frac{1}{r}\boldsymbol{i}_r$ kan beskrives med et potensial $\phi = \phi(r)$ eller en strømfunksjon $\psi = \psi(\theta)$ i henhold til Cauchy–Riemanns likninger

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

som gir $\phi = \ln r$ og $\psi = -\theta$.

Punktvirvel i origo

Strømningen $\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\boldsymbol{i}_\theta$ kan beskrives med et potensial $\phi = \phi(\theta)$ eller en strømfunksjon $\psi = \psi(r)$ i henhold til Cauchy–Riemanns likninger

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{A}{r} \end{aligned}$$

som gir $\phi = \theta$ og $\psi = \ln r$.

Nå skal vi først superponere en kilde og et sluk til en dipol i origo. Deretter skal vi superponere dipolen med en punktvirvel og en konstant strøm.

Dipol: Superposisjon av kilde og sluk vilkårlig nær hverandre

La kilden ligge i posisjon $\boldsymbol{r}_{\text{kilde}} = -\epsilon \boldsymbol{i}$. Avstanden fra et vilkårlig punkt til kilden er $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\text{kilde}}| = \sqrt{(x+\epsilon)^2 + y^2}$. La styrken til kilden være $\frac{1}{2\epsilon}$. Kilden vil da ha potensial

$$\phi_{\text{kilde}} = \frac{1}{2\epsilon} \ln \sqrt{(x+\epsilon)^2 + y^2}.$$

La sluket ligge i posisjon $\boldsymbol{r}_{\text{sluk}} = \epsilon \boldsymbol{i}$. Avstanden fra et vilkårlig punkt til kilden er $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\text{sluk}}| = \sqrt{(x-\epsilon)^2 + y^2}$. La styrken til sluket være $\frac{1}{2\epsilon}$. sluket vil da ha potensial

$$\phi_{\text{sluk}} = -\frac{1}{2\epsilon} \ln \sqrt{(x-\epsilon)^2 + y^2}.$$

Dersom vi superponerer kilden og sluket, og tar grensen at de kommer vilkårlig nær hverandre $\epsilon \to 0$, får vi potensialet

$$\phi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln \sqrt{(x+\epsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\epsilon)^2 + y^2}}{2\epsilon}$$

Dette er et $\frac{0}{0}$ uttrykk, og vi kan bruke L'Hôpitals regel som sier at vi kan derivere både teller og nevner med hensyn på ϵ

$$\phi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{(x+\epsilon)}{(x+\epsilon)^2+y^2} + \frac{(x-\epsilon)}{(x-\epsilon)^2+y^2}}{2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

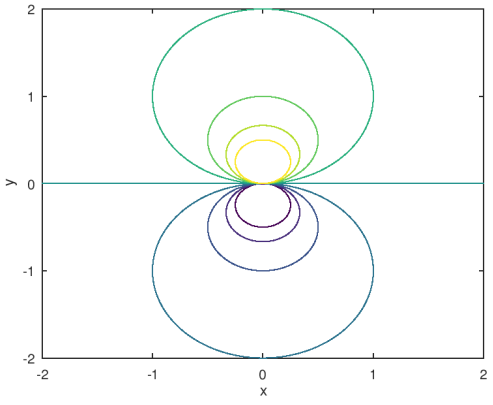
Vi finner lett det tilsvarende uttrykket for strømfunksjonen ved å løse Cauchy–Riemanns likninger

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\cos\theta}{r^2} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\sin\theta}{r^2} \end{aligned}$$

som gir

$$\psi = \frac{\sin\theta}{r}$$

Dette kalles for en dipol, og strømlinjene er illustrert i figuren:



Strømning rundt sylinder: Superposisjon av dipol og rettlinjet strøm

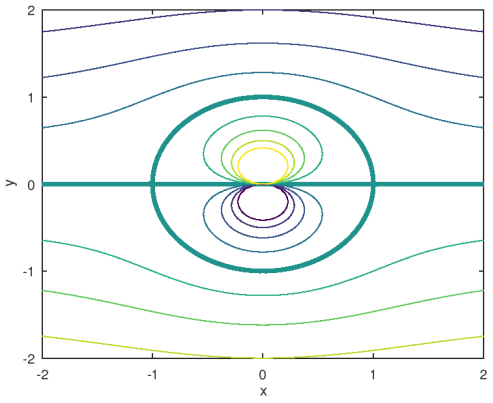
La den rettlinjede strømmen ha styrke V og skriv den på polar form $\phi = Vx = Vr\cos\theta$ og $\psi = -Vy = -Vr\sin\theta$.

La dipolen ha styrke VR^2. Superposisjonen av strømfunksjonene er

$$\psi = -Vr\sin\theta + VR^2\frac{\sin\theta}{r} = V\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)r\sin\theta$$

Legg merke til at $\psi = 0$ for $r = R$, det vil si at denne strømningen kan tjene som modell for en strømning rundt en sylinder med radius $r = R$, eller alternativt som modell for en strømning inni et rør med radius $r = R$.

Figuren viser strømlinjene $\psi =$ konstant, og de tykke strømlinjene har $\psi = 0$:



Strømning rundt sylinder med vilkårlig sirkulasjon rundt sylinderen

Til slutt skal vi superponere med en punktvirvel med vilkårlig styrke i origo. La styrken til punktvirvelen være $-\gamma$, punktvirvelen vil ha strømfunksjon $\psi = -\gamma\ln r$, og det fullstendige strømningsfeltet er gitt ved

$$\psi = V\left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)r\sin\theta - \gamma\ln r$$

Legg merke til at for $r = R$ har vi $\psi = \gamma\ln R$ som er konstant, det vil si at denne strømningen stadig kan tjene som modell for en strømning rundt en sylinder med radius $r = R$, eller alternativt som modell for en strømning inni et rør med radius $r = R$.

Hastighetsfeltet er gitt ved

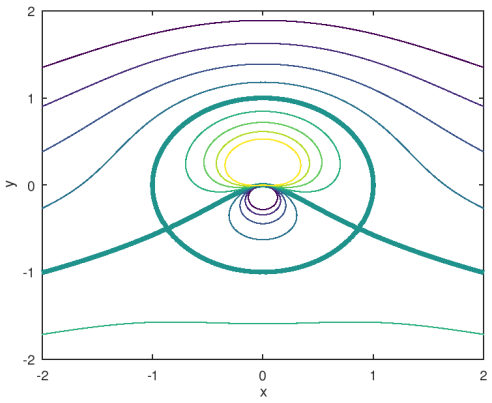
$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{i}_\theta = V\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta\boldsymbol{i}_r - V\left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right)\sin\theta\boldsymbol{i}_\theta - \frac{\gamma}{r}\boldsymbol{i}_\theta$$

På sylinderoverflaten $r = R$ har vi hastighet

$$\boldsymbol{v} = \left(-2V\sin\theta - \frac{\gamma}{R}\right)\boldsymbol{i}_\theta$$

Legg merke til at for positiv $\gamma > 0$ så er strømningen sterkere på oversiden $y > 0$ og svakere på undersiden $y < 0$.

Figuren viser strømlinjene $\psi =$ konstant, og de tykke strømlinjene har $\psi = 0$:



Sirkulasjonen rundt sylinderoverflaten er

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -2\pi\gamma$$

Vi kan nå bruke Bernoullis likning for å beskrive trykket rundt sylinderoverflaten (husk at sylinderoverflaten er en strømlinje)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = K$$

hvor K er en konstant. Dersom vi antar at z holdes konstant (eller at vi kan se bort fra tyngdekraften) så har vi

$$p = -\frac{\rho v^2}{2} + K = -\frac{\rho}{2}\left(2V\sin\theta + \frac{\gamma}{R}\right)^2 + \kappa$$

hvor κ er en konstant.

Kraften som virker på sylinderen vil være

$$\boldsymbol{F} = -\int_{r=R} p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$ er enhets normalvektor som peker ut fra sylinderoverflaten, og hvor $\mathrm{d}\sigma = R\mathrm{d}\theta$. Vi har følgelig

$$\boldsymbol{F} = -\int_0^{2\pi} \left\{-\frac{\rho}{2}\left(2V\sin\theta + \frac{\gamma}{R}\right)^2 + \kappa\right\}(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta)\,R\mathrm{d}\theta$$

Dette ser kanskje fryktingytende ut, men det blir straks mye enklere dersom vi legger merke til at

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$$

og

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

og følgelig har vi sluttresultatet

$$\boldsymbol{F} = 2\pi\rho V\gamma\boldsymbol{j}$$

Legg merke til at punktvirvelen er orientert i $-\boldsymbol{k}$ retning med styrke γ, bakgrunnstrømmen går i $\boldsymbol{i}$ retning med styrke V, dipolen er justert i styrke og retning slik at vi beskriver strømningsfeltet rundt en sylinder med radius R, og dette resulterer i et løft i $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{k})$ retning med styrke $2\pi\rho V\gamma$.

For positiv $\gamma > 0$ er strømningen sterkere på oversiden $y > 0$ og svakere på undersiden $y < 0$, og det resulterer i at løftekraften virker i positiv y-retning.