MEK1100 forelesning 3, 22/1–2024 ved Karsten Trulsen

Posisjon, hastighet, akselerasjon
Se GF kap. 1.4.

Vi skal betrakte en "partikkel" som flytter på seg. Den vil ha en posisjon angitt av en posisjonsvektor som er funksjon av tid $\boldsymbol{r}(t)$. Hastigheten til partikkelen er den tidsderiverte av posisjon $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. Akselerasjonen til partikkelen er den tidsderiverte av hastigheten $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

Eksempel: Fri bevegelse i tyngdefeltet

Innenfor et begrenset område kan vi betrakte tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ som en konstant, med verdi omtrent lik $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$, overalt rettet nedover. Vi lar z-aksen peke oppover. Følgelig kan vi skrive tyngends akselerasjon som $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, og denne skal altså betraktes som konstant både i verdi og retning.

Nå skal vi tenke oss at en partikkel beveger seg med den konstante akselerasjonen gitt ved tyngdens akselerasjon. Vi kan da skrive $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$. Ettersom $\boldsymbol{g}$ er konstant så er det trivielt å integrere opp for hastigheten $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0$ hvor $\boldsymbol{v}_0$ er en integrasjonskonstant som er hastigheten til partikkelen ved tid $t = 0$.

Vi kan videre skrive $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t + \boldsymbol{v}_0$, og det er tilsvarende trivielt å integrere opp for posisjonen $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$ hvor $\boldsymbol{r}_0$ er en integrasjonskonstant som er posisjonen til partikkelen ved tid $t = 0$.

I det generelle tilfellet har vi altså

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{1}$$

og dersom vi kun begrenser oss til bevegelse langs z-aksen så vil resultatet være

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + r_0 \tag{2}$$

Ofte kan man lure på om modell-likninger som disse er riktige. Vi skal nå se på to meget effektive måter for å sjekke om vi har gjort noe galt:

- Leddene må være tensorer av samme rang: alle må være skalar, eller alle må være vektor, eller alle må være dyade, etc.
- Leddene må ha samme fysiske dimensjon: alle må være tid, eller alle må være lengde, eller alle må være akselerasjon, etc.

Vi kan ikke legge sammen en skalar og en vektor. Tilsvarende kan vi ikke legge sammen en tid og en lengde.

Vi ser i hvert fall umiddelbart at i (1) er alle ledd vektorer, og i (2) er alle ledd skalarer. Første test gikk i hvert fall greit!

Skalering og dimensjonsanalyse

Se GF kap. 1.6.

Nå skal vi se på de fysiske dimensjonene til hvert ledd i likninga for fritt fall i tyngdefelt. Begge versjonene, (1) og (2), er dimensjonelle. Dersom likninga hadde vært dimensjonsløs kunne vi ikke ha brukt denne måten for å sjekke likninga.

Fysiske dimensjoner og enheter

I likninga ovenfor inngår det størrelser av fire forskjellige fysiske dimensjoner: tid, lengde, hastighet og akselerasjon. Disse har forskjellige fysiske enheter. For at uttrykket skal være meningsfullt må hvert ledd ha samme fysiske dimensjon. La oss først se på de fire typene som inngår:

fysiske dimensjoner		enhet	
navn	symbol	navn	symbol
tid	T, t	sekund	s
		time	h
		dag, uke, måned, år, etc.	
lengde	L, l, x, y, z, r, s	meter	m
		kilometer	km
		nautisk mil	
		1 favn = 3 alen, 1 alen = 2 fot	
		1 fot = 2 kvart, 1 kvart = 6 tommer	
		1 tomme = 12 linjer, 1 linje = 12 skruppel	
hastighet	$\boldsymbol{v}$		m/s
fart	v		m/s
akselerasjon	a, g		$\mathrm{m/s^2}$

Tabellen etterlater liten tvil om at det er lett å gå seg vill mellom alle enhetene. Vi kunne ønske å løfte oss opp på et høyere nivå hvor det ikke lenger er spørsmål om hvilke enheter vi ønsker å bruke.

La oss nå sjekke enhetene til hvert ledd i likning (1) eller (2) ovenfor:
La oss bruke L for lengde og T for tid:
Venstre side: L
Høyre side: Første ledd $\frac{L}{T^2}T^2 = L$, andre ledd $\frac{L}{T}T = L$, tredje ledd L.
Vi ser at alle ledd har samme fysiske dimensjon av lengde, slik de burde ha. Vi har ikke dermed vist at likninga er riktig, men vi har ikke funnet noen grunn til å hevde at likninga er feil basert på uoverenstemmende fysiske dimensjoner.

Skalering, skrive likninger på dimensjonsløs form

Noen ganger ønsker vi å frigjøre oss fra de fysiske dimensjonene. Det kan for eksempel være en stor fordel dersom vi ikke ønsker å forholde oss til mangfoldet av

mulige enheter, for eksempel kan tid måles i sekund, minutt, time, døgn, år, ... og lengde kan måles i meter, tomme, fot, alen, nautisk mil, ...

Ofte er det mer praktisk å identifisere en karakteristisk tid T og en karakteristisk lengde L som målestokk, og deretter bruke dimensjonsløse størrelser som er skalert med T og L.

Eksempel: Skalering av likning for fritt fall i tyngdefelt

Se på z-komponenten av likninga for fritt fall i tyngdefeltet, likning (2), som vi skriver på ny:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + r_0$$

Vi introduserer stjerne-størrelser som er skalert slik som nettopp forklart:

$$z^* = \frac{z}{L} \qquad r_0^* = \frac{r_0}{L} \qquad t^* = \frac{t}{T} \qquad v_0^* = \frac{v_0}{(\frac{L}{T})} \qquad g^* = \frac{g}{(\frac{L}{T^2})} \tag{3}$$

Da kommer likninga på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}g^*(t^*)^2 + v_0^* t^* + r_0^* \tag{4}$$

Likning (4) er dimensjonsløs. Dette medfører både en ulempe, en fordel, og en mulighet:

1. Ulempen er at vi ikke lenger kan bruke fysiske dimensjoner for å sjekke om likninga er ufornuftig.

2. Fordelen er at vi har frigjort oss fra problemstillingen om hvilke enheter vi skal velge for å angi de forskjellige størrelsene (sekunder, timer, år, ..., meter, fot, tommer, ..., etc.)

3. Muligheten er at vi kanskje kan velge de karakteristiske størrelsene T og L i (3) slik at resultatet (4) blir enda enklere?

Vi kan nå ta skaleringen ett hakk videre, nemlig ved å insistere på at T og L skal velges slik at de dimensjonsløse parameterene g^* og v_0^* og r_0^* blir så enkle som mulig. La oss begrense oss til tilfellet $v_0 > 0$ og la oss insistere på å få $g^* = v_0^* = 1$. Dette oppnår vi ved å sette

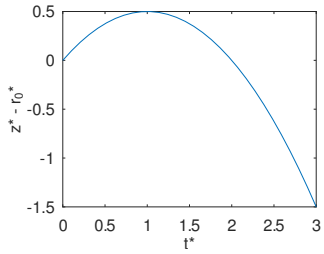
$$T = \frac{v_0}{g} \qquad \text{og} \qquad L = \frac{v_0^2}{g} \tag{5}$$

og da kommer likninga på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}(t^*)^2 + t^* + r_0^* = -\frac{1}{2}t^*(t^* - 2) + r_0^* \tag{6}$$

Denne likninga er på en spesielt enkel form, fordi den har kun én dimensjonsløs parameter. Faktisk kan vi, ved å flytte r_0^* over på venstre side, begrense oss til å tegne kun én graf som dekker alle tilfellene:

$$z^* - r_0^* = -\frac{1}{2}t^*(t^* - 2)$$



Likning (6) har de fordelen at alle frie fall med utgangshastighet oppover er redusert til én eneste kurve. Likning (6) har imidlertid som ulemper at vi kan ikke sjekke om modellen er ufornuftig ved å se på fysiske dimensjoner, og det kan være vanskelig å tolke betydningen av aksene t^* og z^*, spesielt må vi stadig bestemme verdien til r_0^*.

Oppgave: Andre frie fall

Gjør tilsvarende for å beskrive følgende tilfeller:

- Likning (2) for tilfellet $v_0 < 0$. Insister på at $t^* > 0$ når $t > 0$.
- Likning (2) for tilfellet $v_0 = 0$. Nå fungerer ikke (5), men anta $r_0 > 0$ og prøv for eksempel $L = r_0$ og $T = \sqrt{r_0/g}$.
- Likning (1). I dette tilfellet må det skilles mellom horisontal og vertikal bevegelse.

Eksempel: Modell for friksjonskraft med to friksjonskoeffisienter
La oss anta at en friksjonskraft kan modelleres ved likninga

$$\boldsymbol{F} = -\nu \boldsymbol{v} - \mu |\boldsymbol{v}| \boldsymbol{v}$$

hvor ν og μ er to (positive) friksjonskoeffisienter. Her er ν en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med hastigheten, og μ er en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med kvadratet av hastigheten. Hva er de fysiske enhetene til friksjonskoeffisientene?

La oss måle kraft i Newton, $\mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$, og hastighet i $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dersom vi angir de fysiske enhetene til koeffisientene som $[\nu]$ og $[\mu]$ så må vi ha

$$\mathrm{N} = [\nu]\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{N} = [\mu](\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2$$

og følgelig får vi

$$[\nu] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \qquad \text{og} \qquad [\mu] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Litt om dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem
Det er to viktige spørsmål som passer å stille nå: Hva er det minste antallet dimensjonsløse parametere som er nødvendig for å beskrive et fenomen? Hvordan kan vi vite om et fenomen som skjer på stor skala, for eksempel en flodbølge i en fjord som oppstår på grunn av et ras, kan modelleres på riktig måte i et laboratorieeksperiment på liten skala? Disse spørsmålene besvares av dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem. Vi går ikke inn i detaljer, men se gjerne presentasjonen:
Skalering, dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem

Derivasjon

Ordinær derivert, stigningstall

(repetisjon fra første semester)

For en skalar funksjon av én variabel, $f(x)$, definerer vi den deriverte, eller stigningstallet, som grensen

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dersom vi kan forestille oss at Δx ennå ikke har nådd grensen, men at likninga likevel er en god tilnærming, så kan vi skrive et uttrykk for tilveksten til $f(x)$ når vi flytter oss fra x til $x + \Delta x$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Dersom funksjonen er deriverbar, så vil tilnærmingen bli vilkårlig god i grensen at Δx blir vilkårlig liten, da bytter vi ut "Δ" med "d" for å angi "differensial"

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

hvor $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ er infinitesimale størrelser.

> Det som er viktig å poengtere her er at $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ ikke bare er symboler, men er faktiske og virkelige størrelser! De bærer både tensor-rang og fysisk dimensjon!

Partiell derivert

(repetisjon fra første semester)

For en skalar funksjon av to variable, $f(x, y)$, definerer vi de partiellderiverte med hensyn på x og y som grensene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Dersom vi kan forestille oss at Δx og Δy ennå ikke har nådd grensene, men at likningene likevel er gode tilnærminger, så kan vi skrive uttrykk for tilveksten til $f(x, y)$ når vi flytter oss fra (x, y) til $(x + \Delta x, y)$, eller fra (x, y) til $(x, y + \Delta y)$,

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \qquad \text{og} \qquad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Gradient, retningsderivert, del-operator

(LH 2.4, GF 2.3, M 3.2)

I det følgende betrakter vi en skalar funksjon $f(x, y)$ som avhenger av kun to variable x og y.

Tilvekst i vilkårlig retning

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Dersom vi grupperer leddene sammen parvis ser vi at vi kan gjøre tilnærmingen

$$\Delta f = \{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\} + \{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

I grensen $\Delta x \to 0$ og $\Delta y \to 0$ skriver vi

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot (\boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y)$$

som kalles et totalt differensial. Dette kan vi skrive på kortere form som

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

hvor

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y$$

er en infinitesimal forflytningsvektor, og hvor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

kalles gradienten til den skalare funksjonen f.

Vi kan isolere ut ∇ som en vektor-operator. I tre dimensjoner blir den

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

denne kan vi kalle enten "nabla" eller "del".[1]

> Nok en gang, det som er viktig å poengtere her er at $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ikke bare er symboler, men er faktiske og virkelige størrelser! De bærer både tensor-rang og fysisk dimensjon!

[1] Det matematiske symbolet ∇ ble oppfunnet av William Rowan Hamilton (1805–1865). Ordet "nabla" kommer fra gresk eller arameisk språk og er navnet på en antikk harpe som ser ut som symbolet ∇.