MEK1100 forelesning 30 den 15/5–2024 ved Karsten Trulsen

Temperatur

Temperatur T kan måles i diverse enheter. Den vanlige enheten Celsius °C ble tradisjonelt definert ved frysepunktet og kokepunktet til vann ved normalt trykk ved havoverflaten. Vi skal foretrekke den absolutte skalaen Kelvin K. Trinnene i disse to skalaene er like store. Temperaturen 0 K = −273.15°C er det absolutte nullpunkt. Relasjonen mellom de to skalaene er

Temperatur i °C = Temperatur i K - 273.15

Varme

Det vi her kaller *varme* er det samme som man i klassisk termodynamikk ofte kaller *indre energi*. Varme kan følgelig måles og angis i en passende enhet for energi, for eksempel Joule J eller "kilo Watt timer" kWh. Vi har $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Ws}$, $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, og følgelig $1\,\mathrm{kWh} = 3.6\,\mathrm{MJ}$.

Spesifikk og volumetrisk varme

Vi kan oppgi varme per masse eller per volum. Dersom vi oppgir varmen per masse kaller vi den for *spesifikk varme*, som vi skal angi ved symbolet E, og som kan ha enhet J/kg. Dersom vi multipliserer med massetettheten ρ som kan ha enhet kg/m^3 får vi *volumetrisk varme* ρE som kan ha enhet J/m^3.

Adjektivet *spesifikk* foran navnet på en størrelse indikerer altså at det er per masse.

Termodynamisk tilstandslikning

Fra klassisk termodynamikk vet vi at et stoff som er i termodynamisk likevekt oppfyller en tilstandslikning som relaterer tre termodynamiske variable, for eksempel $f(p, V, T) = 0$ hvor p er trykk, V er volum og T er temperatur.

Spesifikk varmekapasitet

I dette emnet MEK1100 skal vi unngå å diskutere termodynamikk og tilstandslikninger. Vi skal begrense oss til at den spesifikke varmen E kun avhenger av temperatur, og at tettheten ρ ikke avhenger av verken trykk eller temperatur. I praksis skal vi anta at vi ser på prosesser som skjer ved konstant trykk.

Vi kan nå skrive *spesifikk varme* $E(T)$ og *volumetrisk varme* $\rho E(T)$.

Funksjonsuttrykket for den spesifikke varmen $E(T)$ er ukjent for oss. Det gjør ikke noe, for vi skal begrense oss til å se på små endringer i varmen som funksjon av små endringer i temperatur rundt en referansetemperatur T_0. I så kan vi utføre en Taylor-utviklingen rundt referansetemperaturen

$$E(T) \approx E(T_0) + \frac{\partial E}{\partial T}(T - T_0) + \cdots$$

Den deriverte av den spesifikke varmen med hensyn på temperatur, $c = \frac{\partial E}{\partial T}$, kalles for den *spesifikke varmekapasiteten* og har enhet J/(kg K). Vi skal betrakte denne som en konstant.

Den spesifikke varmekapasiteten er egentlig ikke konstant!

Egentlig er det ikke så enkelt som vi antyder ovenfor. Den spesifikke varmekapasiteten er ikke konstant, men kan variere drastisk med hensyn på temperatur, og spesielt med hensyn på faseoverganger mellom fast stoff, væske og gass. Dessuten spiller det en rolle om vi beregner den deriverte $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ ved konstant volum V eller ved konstant trykk p.

Vi skiller mellom den spesifikke varmekapasiteten ved konstant volum c_V og ved konstant trykk c_p. Den grunnleggende forskjellen på disse er følgende: Dersom vi varmer opp et stoff, og stoffet får lov til å utvide seg mens trykket holder seg konstant, så vil stoffet utføre arbeid på omgivelsene fordi stoffet vil skyve vekk omgivelsene. Den tilførte energien vil gå delvis til oppvarming av stoffet og delvis til å utføre arbeid på omgivelsene. Om vi derimot varmer opp et stoff, og stoffet tvinges til å beholde sitt opprinnelige volum, så vil all den tilførte energien gå til oppvarming. Følgelig forventer vi at $c_p > c_V$. For gasser er både den absolutte og den relative forskjellen større enn for væsker.

Her er en tabell med noen typiske verdier:

Størrelse	c_p	c_V	ρc_p	ρ
Enhet	J/(g K)	J/(g K)	J/(cm^3 K)	kg/m^3
Is (-10°C)	2.05		1.938	916.8
Vann (25°C)	4.1813	4.137	4.1796	997.0
Vann (100°C)	4.1813	4.137	4.2160	958.4
Vanndamp (100°C)	2.080	1.56		
Luft (rombetingelser)	1.012	0.723	0.00121	1.20

Tabellen er satt sammen med tall fra en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity, en.wikipedia.org/wiki/Density og en.wikipedia.org/wiki/Ice.

Betraktingene vi gjør i dette emnet MEK1100 er best i overensstemmelse med å holde trykket konstant, følgelig er det c_p som kommer til anvendelse i det følgende. Vi skal skrive bare c uten indeks når vi egentlig mener c_p.

Store temperaturendringer og faseoverganger

Tabellen ovenfor viser tydelig at den spesifikke varmekapasiteten varierer betydelig som funksjon av temperatur, spesielt ved faseoverganger mellom fast stoff, væske og gass.

Mange lærebøker gjør feil ved å skrive at den spesifikke varmetettheten er cT eller at den volumetriske varmetettheten er ρcT hvor ρ og c oppfattes som konstanter og hvor T er den absolutte temperaturen. Denne feilen forekommer både hos Matthews i starten på hans kapittel 8.1 hvor det står at den volumetriske varmetettheten er ρcT, og den forekommer hos Gjevik og Fagerland i fasit til oppgave 2 i kapittel 11 hvor nevneren i en brøk er ρcT. I begge tilfeller hadde det blitt riktig ved å skrive $\rho c\Delta T$ for $\Delta T = T - T_0$ liten.

Små temperaturendringer uten faseoverganger

For små endringer av temperatur utenom faseoverganger kan vi betrakte den spesifikke varmekapasiteten som en konstant og vi kan skrive Taylor-utviklingen

$$\Delta E \equiv E(T) - E(T_0) \approx \frac{\partial E}{\partial T}(T - T_0) \equiv c\Delta T$$

hvor $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ beregnet ved $T = T_0$, og hvor T_0 er en referansetemperatur.

Endring av varmemengde i et kontrollvolum

Vi ser på et kontrollvolum V. Den totale varmen innenfor kontrollvolmet V er

$$\int_V \rho E(T)\,\mathrm{d}\tau$$

Dersom vi endrer temperaturen litt, og vi kan anta at tettheten og varmekapasiteten er omtrent konstant, så vil endringen i den termiske energien være

$$\int_V \rho c \Delta T\,\mathrm{d}\tau$$

Eksempel: Pris for å varme opp luft og vann i hjemmene våre

Prisen for elektrisk energi kan konsulteres på nett, for eksempel på vevsidene https://www.strompris.no/ eller https://www.nordpoolgroup.com/.

La oss anta at energiprisen er 0.31 kr/kWh. Strømregningen vi betaler består imidlertid av både energiregning og nettregning, som en tommelfingerregel kan vi anta at disse to er omtrent like store, vi skal derfor i det følgende anta at strømregningen vil være 0.62 kr/kWh.

Prisen for å lufte stua: Anta stua har $V = 10 \cdot 5 \cdot 3$ m^3 luft som byttes ut med kald uteluft. Vi må deretter varme opp denne lufta $\Delta T = 20$ K. Dette vil koste

$$0.00121\,\mathrm{J/(cm^3\ K)} \cdot 150\,\mathrm{m^3} \cdot 20\,\mathrm{K} \cdot 0.62\,\mathrm{kr/kWh} \approx 0.63\,\mathrm{kr}$$

Prisen for å ta seg et bad: Anta vi må varme opp $V = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5$ m^3 vann $\Delta T = 30$ K for å ta oss et varmt bad. Dette vil koste

$$4.2\,\mathrm{J/(cm^3\ K)} \cdot 0.5\,\mathrm{m^3} \cdot 30\,\mathrm{K} \cdot 0.62\,\mathrm{kr/kWh} \approx 11\,\mathrm{kr}$$

Utledning av varmelikninga

Vi skal nå gjøre regnskap for varmen i et vilkårlig fastholdt kontrollvolum V. Vi antar at den indre energien kun er en funksjon av temperaturen.

Endringen av den totale varmen er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho E(T)\,\mathrm{d}\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho E(T)\right)\,\mathrm{d}\tau$$

Den totale varmen i kontrollvolumet kan endre seg av tre grunner:

1. Varmekonveksjon — varmetransport fordi fluidet strømmer med hastighet $\boldsymbol{v}$
2. Varmeledning — varmetransport som ikke er assosiert med at fluidet strømmer
3. Produksjon av varme i kontrollvolumet — f.eks. kjemiske reaksjoner, friksjon, varmeovner, etc.

Varmekonveksjon er beskrevet av den volumetriske varmeflukstettheten på grunn av konveksjon

$$\boldsymbol{H}_s = \rho E(T)\boldsymbol{v}$$

som har enhet J/(m^2 s).

Varmeledningen er beskrevet ved hjelp av Fouriers lov (som sier at varme ledes fra der hvor det er varmt til der hvor det er kaldt) som gir den volumetriske varmeflukstettheten på grunn av ledning

$$\boldsymbol{H}_l = -k\nabla T$$

som også har enhet J/(m^2 s), og hvor k kalles for varmeledningstall eller termisk konduktivitet og har enhet J/(m s K).

Den totale varmeflukstettheten vil være

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_l = \rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T$$

Lokal produksjon av varme skal vi notere med symbolet q som har enhet J/m^3.

Totalregnskapet for varme i kontrollvolumet blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho E(T)\,\mathrm{d}\tau = -\int_S (\rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + \int_V q\,\mathrm{d}\tau$$

som vi kan omforme til kun ett felles volmintegral ved hjelp av Gauss sats og det faktum at vi har valgt et kontrollvolum som er fastholdt

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho E(T)) + \nabla\cdot(\rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T) - q\right\}\mathrm{d}\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig så må det som står inni sløyfeparentesen være lik null

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E(T)) + \nabla\cdot(\rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T) - q = 0$$

og dette uttrykket kan utvikles

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}E(T) + \rho\frac{\partial E(T)}{\partial t} + E(T)\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla E(T) + \rho E(T)\nabla\cdot\boldsymbol{v} = k\nabla^2 T + q$$

Her legger vi merke til at kombinasjonen av første, tredje og femte ledd forsvinner på grunn av kontinuitetslikninga.

Nå benytter vi kjerneregelen:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{og} \qquad \nabla E = \frac{\partial E}{\partial T}\nabla T = c\nabla T$$

Dermed kan vi skrive

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

hvor vi har introdusert varmediffusiviteten $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ som har enhet m^2/s.

Eksempel: Den klassiske varmelikninga

Uten konveksjon $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ og uten varmeproduksjon $q = 0$ står vi igjen med den "klassiske" varmelikninga

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

og varmeflukstettheten

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_l = -k \nabla T$$

Temperaturen vil øke/avta i tid der hvor temperaturprofilet krummer opp/ned i rom. Varmefluksen vil være orientert i retningen hvor temperaturen avtar.

Eksempel: Stasjonær temperaturfordeling gjennom et vindusglass

Vinuet strekker seg fra $x = 0$ på innsiden til $x = L$ på utsiden, har konstant tverrsnitt A, termisk konduktivitet k, og har pålagt temperatur $T = T_{\text{inne}}$ ved $x = x_0$ og $T = T_{\text{ute}}$ ved $x = x_L$. Ettersom vinduet antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjon, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. En stasjonær endrer seg ikke i tid, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Varmelikninga gir oss da

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Løsninga er

$$T(x) = \frac{T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}}{L} x + T_{\text{inne}}.$$

Den integrerte varmefluksen gjennom et tverrsnitt S av vinduet for vilkårlig x er

$$Q = \int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{i} \, \mathrm{d}\sigma = -k \frac{T_{\text{ute}} - T_{\text{inne}}}{L} A$$

Legg merke til at dette svaret er uavhengig av x, det er et uttrykk for at det ikke hoper seg opp varme noe sted i vinduet.

Eksempel: Hvor tykt må et vindu eller en yttervegg være for å tilfredsstille myndighetenes krav?

For å angi den isolerende evnen til vinduer, vegger osv. bruker man ofte en størrelse som kalles U-verdi som er definert ved

$$U = \left| \frac{Q}{A \Delta T} \right| = \frac{k}{L}$$

hvor vi har brukt forrige eksempel som motivasjon. Se no.wikipedia.org/wiki/U-verdi. Typiske krav er $U \leq 1.2$ W/(m^2 K) for vinduer og $U \leq 0.18$ W/(m^2 K) for yttervegger.

Vi kan nå regne ut hva som er minste tykkelse av diverse materialer, for at myndighetenes krav om isolasjon i vinduer og vegger skal være oppfylt:

Størrelse	k	L_{vindu}	L_{vegg}
Enhet	W/(m K)	m	m
Glass	1	0.83	5.6
Tørr snø	0.11	0.092	0.61
Luft	0.025	0.02	0.14

Vi innser at det ikke er vanskelig å lage en iglo som tilfredsstiller myndighetenes krav!

Vi innser også at glass er noe av det mest vanvittige byggematerialet dersom det alene skal gi den nødvendige varme-isolasjonen.

Luft hadde vært et særdeles godt byggemateriale dersom det ikke hadde den leie tendensen til å bevege seg. Neste eksempel viser hvor liten konveksjonshastigheten trenger å være for at konveksjon er mer effektiv en varmeledning for å transportere varme.

Et byggemateriale som holder luft i ro, for eksempel dobbel- eller trippel-glass, eller porøs luftholdig isolasjon, kan være smart for å oppnå ønsket isolerende evne uten at vegger og vinduer trenger å bli alt for tykke. Vi innser også at varme klær bør være laget av stoffer som inneholder mye luft som ikke får lov til å bevege seg.

Eksempel: Hvor fort må luft bevege seg for at konveksjon er like effektiv som varmeledning?

Anta en karakteristisk temperaturdifferanse er $\Delta T = 10$ K og at en karakteristisk temperaturgradient er $\beta = |\nabla T| = 10$ K/m. For luft har vi massetetthet $\rho = 1.2$ kg/m^3, spesifikk varmekapasitet $c = c_p = 1.012$ J/(g K) og termisk konduktivitet $k = 0.025$ J/(m s K). For at konveksjon og varmeledning er like effektiv må lufta bevege seg med fart

$$v = \frac{k\beta}{\rho c \Delta T} = \frac{0.025 \cdot 10}{1.2 \cdot 1012 \cdot 10}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.1 \cdot 10^{-5}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 21\frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$$

Dette er ekstremt langsomt!

Vi bør med andre ord ha respekt for hvor avkjølende en kald trekk kan være, eller hvor effektiv en varmluftsvifte kan være for å gi hurtigere oppvarming!

Eksempel: Dersom overflaten S til et legeme V holdes ved konstant temperatur T_0, og det ikke er konveksjon eller kilder, så vil temperaturen i det indre av legemet konvergere mot T_0.

Dette er eksempel 8.1 i kapittel 8.1 i Matthews.

La $\xi = T - T_0$, varmelikninga kan skrives

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \xi$$

Multipliser med ξ og bruk identiteten $\xi\nabla^2\xi = \nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - \nabla\xi \cdot \nabla\xi$,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \xi^2}{\partial t} = \kappa \left[\nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - |\nabla \xi|^2\right]$$

Ta volumintegralet over legemet

$$\int_V \frac{1}{2}\frac{\partial \xi^2}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = \kappa \int_V \nabla \cdot (\xi \nabla \xi) - |\nabla \xi|^2\,\mathrm{d}\tau$$

Benytt Gauss sats

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \xi^2\,\mathrm{d}\tau = \kappa \int_S \xi \nabla \xi \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma - \kappa \int_V |\nabla \xi|^2\,\mathrm{d}\tau$$

Første integral på høyre side gir ikke bidrag fordi $\xi = 0$ på overflaten S. Andre integral på høyre side gir negativ verdi. Den tidsderiverte på venstre side må altså være negativ, men integralet på venstre side kan ikke være negativt. Følgelig må ξ avta mot 0 i det indre av legemet V.

Det siste eksemplet forklarer faktisk hvorfor det fungerer å steke noe i ovenen på kjøkkenet! Man setter termostaten på ønsket temperatur, så venter man tilstrekkelig lang tid til at det som skal stekes har oppnådd ønsket temperatur igjennom det hele!