Eksempel på skalering: Skrått kast

Se GF kap. 1.6.

Vi ser nok en gang på formelen for fri bevegelse i tyngdefeltet

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{1}$$

men denne gangen med en utgangshastighet på skrå med vinkel θ. Dersom vi skriver $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{v}_0 = v_0(\boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{k}\sin\theta)$ og $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + z_0\boldsymbol{k}$ så får vi følgende likninger for horisontal og vertikal bevegelse

$$x = v_0 t\cos\theta + x_0$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta + z_0$$

Her er det fem parametere: g, v_0, θ, x_0, z_0. Trenger vi så mange parametere for å karakterisere et vilkårlig skrått kast? La oss redusere ned til kun én parameter!

Framgangsmåten er å skalere alle lengder med en karakteristisk lengde L og alle tider med en karakteristisk tid T, slik at vi får dimensjonsløse størrelser

$$g^* = \frac{gT^2}{L}, \quad v_0^* = \frac{v_0 T}{L}, \quad \theta, \quad x_0^* = \frac{x_0}{L}, \quad z_0^* = \frac{z_0}{L}$$

Legg merke til at vinkelen θ allerede er en dimensjonsløs størrelse. Det naturlige målet for vinkel, nemlig radianer, er forholdstallet mellom buelengde og radius.

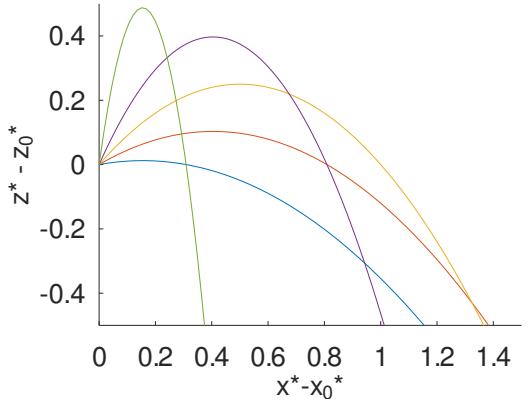
Kanskje den lureste måten vi kan velge L og T er slik at $g^* = v_0^* = 1$, dette oppnår vi ved $L = v_0^2/g$ og $T = v_0/g$. Dermed har vi redusert antall parametere til tre: θ, x_0^*, z_0^*.

$$x^* = t^*\cos\theta + x_0^*$$
$$z^* = -\frac{1}{2}t^{*2} + t^*\sin\theta + z_0^*$$

Vi kan ta enda et grep, nemlig å eliminere tiden, $t^* = (x^* - x_0^*)/\cos\theta$, slik at vi får kun én likning

$$z^* - z_0^* = -\frac{(x^* - x_0^*)^2}{2\cos^2\theta} + (x^* - x_0^*)\tan\theta$$

Resultatet kan vi tegne opp som en én-parameter familie med kurver, de forskjellige kurvene svarer til forskjellige utgangsvinkler θ:



Gradient, retningsderivert, del-operator
(LH 2.4, GF 2.3, M 3.2)

Litt repetisjon fra sist: Vi så på tilveksten til en funksjon $f(\boldsymbol{r})$ når vi flytter oss fra $\boldsymbol{r}$ til $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vi fant

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (\boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z)$$

som kalles et totalt differensial. Dette kan vi skrive på kortere form som

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

hvor

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$$

er en infinitesimal forflytningsvektor, og hvor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

kalles gradienten til den skalare funksjonen f.

Vi kan isolere ut ∇ som en vektor-operator

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Denne kan vi kalle enten "nabla" eller "del".[1]

> Nok en gang, det som er viktig å poengtere her er at $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ikke bare er symboler, men er faktiske og virkelige størrelser! De bærer både tensor-rang og fysisk dimensjon!

Retningsderivert = stigningstall langs en retning

La $\boldsymbol{a}$ være en enhets retningsvektor, $|\boldsymbol{a}| = 1$. La oss betrakte ei linje som går igjennom punktet $\boldsymbol{r}_0$ langs retningen til $\boldsymbol{a}$, og la s være avstanden fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}s$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}s$$

Differensialet til den skalare funksjonen f kan da skrives

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}s$$

[1] Det matematiske symbolet ∇ ble oppfunnet/introdusert av William Rowan Hamilton (1805–1865). Ordet "nabla" kommer fra gresk eller arameisk språk og er navnet på en antikk harpe som ser ut som symbolet ∇.

Den retningsderiverte til f i retning $\boldsymbol{a}$ er

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a}$$

Vi skal kreve at $|\boldsymbol{a}| = 1$ for at den retningsderiverte skal ha en intuitivt riktig verdi. Vi ønsker nemlig at s skal måle avstanden som vi beveger oss langs linja. Legg imidlertid merke til at noen matematiske tekster tillater $|\boldsymbol{a}| \neq 1$ (se for eksempel LH 2.4 sin kommentar midt på side 119, legg for øvrig merke til at LH 2.4 har byttet om $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{r}$ i forhold til presentasjonen her).

Egenskaper til gradienten til en skalar ∇f

For en funksjon $f(\boldsymbol{r})$ kan den retningsderiverte i retningen til $\boldsymbol{a}$ skrives som

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a} = |\nabla f||\boldsymbol{a}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

Her tenker vi oss at vi står i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og beveger oss i retning $\boldsymbol{a}$ i henhold til en parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a}$ hvor parameteren s angir avstanden fra punktet $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{a}$ sin retning. Vi skal insistere på at $|\boldsymbol{a}| = 1$ slik at s faktisk måler avstand. Vinkelen mellom ∇f og $\boldsymbol{a}$ er θ.

Vi ser at den største verdien for den retningsderiverte oppnås for $\theta = 0$, det vil si når $\boldsymbol{a}$ og ∇f peker i samme retning. Vi kan sette $\boldsymbol{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ og vi ser at den største verdien til den retningsderiverte er $|\nabla f|$.

Vi ser også at dersom $\boldsymbol{a} \perp \nabla f$ så er den retningsderiverte lik null.

Eksempel: Hvor bratt er et terreng i en bestemt retning?

Oppgave: Et terreng er gitt ved

$$z = h(x, y) = x^2 - y^2$$

hvor x peker mot øst, y peker mot nord, z-aksen peker oppover, og $h(x, y)$ er høyden til terrenget. Undersøk om likninga er gitt på dimensjonell eller dimensjonsløs form. Finn stigningstallet i punktet (1,0) i retning nordøst.

Først undersøker vi om likninga er dimensjonell eller ikke: Vi innser at x, y og z må representere lengder. Dersom likninga var dimensjonell så ville høyresiden ha dimensjon av areal mens venstresiden vil ha dimensjon av lengde. Dette er en selvimotsigelse da en lengde ikke kan være lik et areal. Følgelig innser vi at likninga er gitt på dimensjonsløs form.

Retningen nordøst betyr at vi går like mye mot nord og øst, for eksempel $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. Vi insisterer imidlertid på at $|\boldsymbol{a}| = 1$, så vi må normalisere lengden $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$. Gradienten til h er $\nabla h = 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$. Den retningsderiverte er $\nabla h \cdot \boldsymbol{a} = \sqrt{2}(x - y)$. Stigningstallet i punktet $(1, 0)$ i retning nordøst er $\nabla h \cdot \boldsymbol{a}|_{x=1,y=0} = \sqrt{2}$.

Eksempel: I hvilken retning øker temperaturen mest?

Oppgave: Temperaturen i et rom er gitt ved

$$T(x, y, z) = \alpha(x + 2y - 3z).$$

Dersom temperaturen måles i Kelvin (K) og lengde måles i meter (m), hva er enheten til α? I hvilken retning øker temperaturen mest, og hvor mye?

Først ser vi at enheten til α må være $[\alpha] = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$.

Gradienten til temperaturen er $\nabla T = \alpha(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$. Vi vet at temperaturen øker mest i retningen til gradienten. Den retningsderiverte i den retningen er lik $|\nabla T| = \alpha\sqrt{14}$.

Vi kan også regne ut enhets retningsvektor i retningen som temperaturen øker mest $\boldsymbol{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$.

Taylor-utvikling[2]

Taylor-utvikling i én variabel

Se GF kap. 2.2, M kap 3.1.

Taylor-utvikling i én variabel har de fleste hørt om fra MAT-INF1100.

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x)$ rundt et punkt x_0 er

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

Ta som eksempel $f(x) = \cos x$ og $x_0 = 0$, da får vi

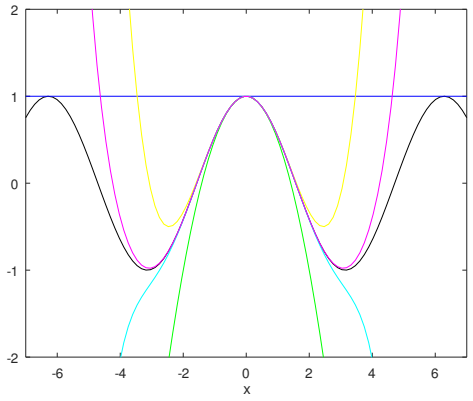
$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Følgende program i Matlab/Octave:

```
% Taylor-utvikling av cos(x) rundt origo
xmax=7;
n=100;
x=linspace(-xmax,xmax,n);
hold off
% funksjonen i svart
plot(x,cos(x),'k');
axis([-xmax xmax -2 2])
xlabel('x')
hold on
% potens null i blå
plot ([-xmax xmax], [1 1], 'b');
% potens to i grønn
plot (x, 1 - 1/2*x.^2, 'g');
```

produserer kurvene i svart, blå og grønn i følgende plott:

[2] Brook Taylor (1685–1731) ble født samme år som komponisten Johan Sebastian Bach!



Vis at dersom Taylor-utviklingen fortsettes vil resultatet til fjerde, sjette og åttende potens være gitt ved kurvene tegnet i gul, cyan og magenta!

Taylor-utvikling i flere variable
Se GF kap. 2.2, M kap 3.1.

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x, y)$ rundt et punkt (x_0, y_0) er

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \tag{3}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \cdots \tag{4}$$

Vi trenger nå følgende resultat fra matematikken, se LH 2.5.2: Dersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer og er kontinuerlige, så er de like. Vi skal anta at dette er tilfellet for oss, så vi kan skrive

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \cdots \tag{7}$$

Neste gang skal vi skal se på eksempler på Taylor-utvikling i flere variable og visualisering på datamaskin.