MEK1100 forelesning 6, 31/1–2024 ved Karsten Trulsen

Strømlinjer/Feltlinjer

Se GF kap. 2.4, 3.4, 3.5.

Strømlinjene eller feltlinjene til et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ er kurver som har vektorfeltet som tangent overalt.

Husk at for to vektorer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ har vi at $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ hvor θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$. Dersom vektorene $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er parallelle, $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$, så er $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. Motsatt vei har vi at dersom kryssproduktet er null $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ så er de enten parallelle $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$ eller en av dem er nullvektor $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

La oss tenke oss at strømlinjene har infinitesimale tangentvektorer $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vi krever at $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er parallell med $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\|\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, som vi kan skrive som

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}.$$

Dette er likninga som vi må løse for å finne strømlinjene, men vi kan merke oss at likninga antakelig ikke kommer til å fungere i punkter hvor $\boldsymbol{v}$ enten er nullvektor eller har en singularitet.

Punkter hvor $\boldsymbol{v}$ er nullvektor skal vi kalle stagnasjonspunkter. Punkter hvor $\boldsymbol{v}$ er singulær skal vi kalle singulære punkter.

Eksempel: La $\boldsymbol{v}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$. Finn strømlinjene!

Først legger vi merke til at $\boldsymbol{v}$ ikke er singulær noe sted, men er nullvektor i origo. Følgelig skal vi kalle origo for et stagnasjonspunkt.

Med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ så blir differensialet $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-y&x&0\\\mathrm{d}x&\mathrm{d}y&\mathrm{d}z\end{vmatrix}=x\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{i}+y\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{j}+(-y\,\mathrm{d}y-x\,\mathrm{d}x)\,\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

Denne likninga løser vi komponentvis

$$x\,\mathrm{d}z=0\qquad y\,\mathrm{d}z=0\qquad -y\,\mathrm{d}y-x\,\mathrm{d}x=0$$

Første likning har løsning $x=0$ eller $z=$ konstant.

Andre likning har løsning $y=0$ eller $z=$ konstant.

Tredje likning er ei separabel ordinær differensiallikning, $x\,\mathrm{d}x=-y\,\mathrm{d}y$, og løses ved å ta integralet (antiderivert) på begge sider, $\int x\,\mathrm{d}x=-\int y\,\mathrm{d}y$, som gir $\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}y^2+\text{konstant}$.

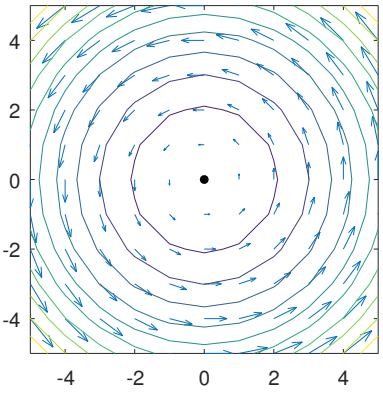
Den fulle løsningen blir da $x^2+y^2=$ konstant og $z=$ konstant, altså sirkler med sentrum i $x=y=0$ og som ligger i plan parallelle med xy-planet.

Å plotte ekviskalarkurver $f(x,y)=$ konstant gjøres enkelt med `contour`-kommandoen i Matlab/Octave eller Python.

Følgende program i Matlab/Octave visualiserer strømlinjene sammen med et pilplott for vektorfeltet, og vi spanderer en stor svart prikk i stagnasjonspunktet:

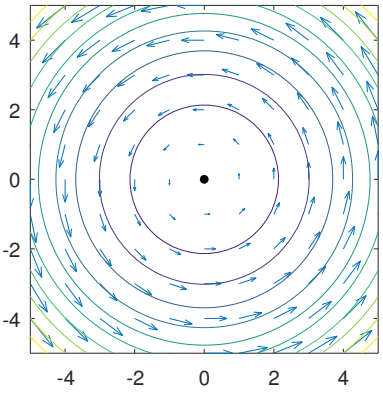
```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = -y;
vy = x;
quiver(x,y,vx,vy)
% følgende for at sirklene skal se ut som sirkler og ikke ellipser:
axis equal
f = x.^2 + y.^2;
hold on
contour (x, y, f)
% følgende markerer stagnasjonspunktet med et svart kulepunkt:
plot (0, 0, '.k', 'markersize', 20)
hold off
```

og produserer følgende plott:



Dette plottet har i hvert fall ikke for få piler, men sirklene er ikke spesielt pene. Rutenettet er kanskje for fint for pilene, men for grovt for kurvene. Vi kan lage rutenettet finere, men vi ønsker egentlig ikke flere piler. Løsningen er i så fall å bruke forskjellig rutenett for `quiver` og `contour`, for eksempel

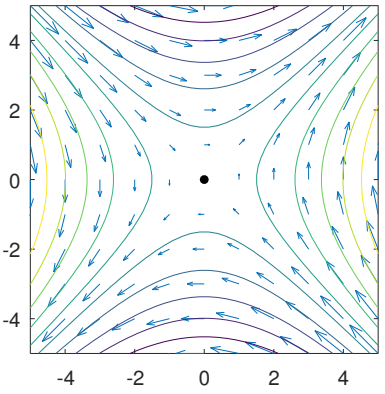
```
[x,y] = meshgrid(linspace(-5,5,40));
f = x.^2 + y.^2;
contour (x, y, f)
```



Eksempel: La $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Finn strømlinjene!

Vis at i dette tilfellet får vi løsning $x^2 - y^2 =$ konstant og $z =$ konstant, altså hyperbler som ligger i plan parallelle med xy-planet.

Vi kan modifisere skriptet ovenfor (det trengs kun å endre to fortegn) og få følgende figur:



Nok en gang er det behov for å bruke forskjellig oppløsning i rutenett for antall piler kan være forholdsvis lite samtidig som kurvene til konturplottet blir tilstrekkelig glatte.

Rotasjon som stivt legeme

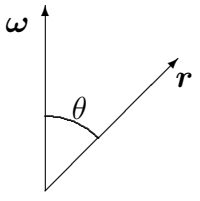
Se GF kap. 2.4.2 og M kap. 1.3.1.

Vi sier at et legeme er stivt dersom innbyrdes avstand mellom materielle punkter forblir uendret. Rotasjon som stivt legeme betyr at de materielle punktene i legemet beholder sine innbyrdes avstander mens legemet som helhet roterer.

La omløpstiden være T, og la vinkelfarten være gitt ved $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La oss definere rotasjonsaksen ved høyrehåndsregelen: La de fire fingrene på høyre hånd bøye seg i rotasjonsretningen, da sier vi at tommelen peker i positiv retning langs rotasjonsaksen. La oss definere vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ som en vektor med lengde $\frac{2\pi}{T}$ orientert i positiv retning langs rotasjonsaksen: $\boldsymbol{\omega}$ peker langs høyre tommel, rotasjonen går langs de fire andre fingrene på høyre hånd.

I det følgende lar vi origo ligge langs rotasjonsaksen. I så fall vil hastigheten til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ være

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$



Et punkt med radius avstand $R = r\sin\theta$ fra rotasjonsaksen, hvor $r = |\boldsymbol{r}|$ er lengden til posisjonsvektor og θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\omega}$, skal tilbakelegge omkretsen $2\pi R$ i løpet av tiden T, da blir banefarten $v = \frac{2\pi R}{T}$ og vinkelfarten $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$.

Hastigheten $\boldsymbol{v}$ står normalt på posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ og normalt på vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$.

Posisjonsvektor er funksjon av tid $\boldsymbol{r}(t)$ og er løsning av differensiallikninga

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Akselerasjonen til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ vil være

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right).$$

Dersom vinkelhastigheten er konstant så er det kun posisjonsvektor som skal deriveres

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}.$$

Her har vi benyttet vektor-identiteten

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Dersom $\boldsymbol{r}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}$, så har vi

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$

som vi kan gjenkjenne som det vanlige uttrykket for sentripetalakselerasjon.

La oss vise at vektorfeltet $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ er en rotasjon som et stivt legeme!

Nå skal vi vise at innbyrdes avstand mellom to materielle punkter forblir uendret. La de to punktene være $\boldsymbol{r}_1(t)$ og $\boldsymbol{r}_2(t)$. Hver av dem oppfyller

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n.$$

Vektor-avstanden mellom dem skal vi angi som $\boldsymbol{l}(t) = \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t) = l_x\boldsymbol{i} + l_y\boldsymbol{j} + l_z\boldsymbol{k}$. Vi har at

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}$$

Det som skal forbli uendret er imidlertid den skalare avstanden

$$l = |\boldsymbol{l}| = \sqrt{(l_x)^2 + (l_y)^2 + (l_z)^2}$$

så vi regner ut den deriverte ved hjelp av kjerneregelen

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial l}{\partial l_x}\frac{\mathrm{d}l_x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial l}{\partial l_y}\frac{\mathrm{d}l_y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial l}{\partial l_z}\frac{\mathrm{d}l_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{l}}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l})}{l} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l})}{l} = 0$$

La oss løse bevegelseslikninga for rotasjon som stivt legeme!

Vi har

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

La oss anta $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$.
Vi får de to koblede likningene

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega x$$

som vi kan kombinere til ei likning

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

Noen har kanskje lært hvordan man løser slike differensiallikninger?

Det gjør ikke noe om vi ikke vet hvordan man løser disse differensiallikningene. Vi kan nemlig nøye oss med å vise at

$$\boldsymbol{r}(t) = R(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t) + z_0\boldsymbol{k}$$

er en løsning for rotasjonsbevegelsen når $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. Her er z_0 en vilkårlig konstant z-koordinat.

Vi må vise at $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.

Den enkleste måten er å sette inn på begge sider. Vi har

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega(-\boldsymbol{i}\sin\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t)$$

og

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\omega t & R\sin\omega t & z_0 \end{vmatrix} = -R\omega\boldsymbol{i}\sin\omega t + R\omega\boldsymbol{j}\cos\omega t$$

som åpenbart er like.

Definisjon av begrepet "nord"

Vi skal definere begrepet "nord" som en angivelse av en rotasjonsbevegelse:

> Legg de fire fingrene på høyre hånd langs rotasjonsbevegelsen, slik at høyre tommel peker i $\boldsymbol{\omega}$ sin retning. Da er tuppen på tommelen "nord".

Eksempel: Hvilken vei beveger vi oss når vi befinner oss på jorda, og hvilken vei er vi akselerert?

Hint: La origo være i jordas sentrum. La $\boldsymbol{r}$ være vår posisjonsvektor (når vi står oppreist har vi retningen til $\boldsymbol{r}$). Finn retningen til $\boldsymbol{\omega}$ (mot nord). Finn retningen til $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Finn retningen til $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$.

Svar: Vi beveger oss mot øst og er akselerert vinkelrett inn mot rotasjonsaksen til jorda. Prøv å se for deg hvilke retninger dette er!

Eksempel: Magnetisk nord for elektromagnet

En elektromagnet lages ved å sende strøm gjennom en kveil av ledning. Dersom vi lar de fire fingrene på høyre hånd peke i retningen til strømmen i ledningen, da vil tuppen på høyre tommel være magnetisk nord.

Eksempel: Hvilken vei roterer jorda rundt seg selv og hvilken vei roterer jorda rundt sola?

I begge tilfeller lar vi høyre tommel peke mot Nordstjernen, også kalt Polarstjernen, da peker/krummer de fire fingrene på høyre hånd i rotasjonsretning.

Prograd og retrograd bevegelse

Dersom to samtidige rotasjonsbevegelser har samme retning "nord" sier vi de er **prograd**. Dersom de har motsatt retning "nord" sier vi de er **retrograd**.

Eksempel: Planetbevegelse

Hos Wikipedia https://no.wikipedia.org/wiki/Retrograd og prograd bevegelse leser vi:

Alle planetene i solsystemet roterer samme vei (prograd), med unntak av Venus og Uranus som begge har retrograd rotasjon om sin egen akse.

Eksempel: Jorda har prograd rotasjon rundt seg selv og rundt sola

Flere morsomme eksempler på prograd og retrograd bevegelse:

I fornøyelsesparker som for eksempel "Jul i vinterland" i Oslo kan man ofte finne både tradisjonelle nostalgiske karuseller og pariserhjul. I det første tilfellet roterer man både rundt seg selv og rundt med karusellen: Prograd eller retrograd? I det andre tilfellet roterer man ikke rundt seg selv, kun rundt hjulet.

Kanskje du allerede har prøvd både karusellen og pariserhjulet her:
Karusell og pariserhjul i Oslo!

Dersom en person lar seg drive rundt i en strømvirvel, for eksempel i Saltstraumen, eller et insekt lar seg drive rundt i en slukvirvel i badekaret eller i vasken eller i en kopp kaffe som du rører rundt med en skje, vil det være prograd eller retrograd bevegelse? Prøv å gjøre noen av eksperimentene selv! Hint: Bevegelsen kan være både prograd og retrograd!

Strømvirvel i Saltstraumen