MEK1100 forelesning 7, 5/2–2024 ved Karsten Trulsen

Først litt regneøvelse:

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Finn strømlinjene, tegn strømlinjer og vektorpileplott!

Se utfyllende beskrivelse i forelesningsnotater 6!

Eksempel: Vis at $\boldsymbol{r}(t) = R(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t) + z_0\boldsymbol{k}$ er en løsning for rotasjonsbevegelsen $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ når $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$.

Se utfyllende beskrivelse i forelesningsnotater 6!

Nytt tema: Kurveintegral

(Dette er allerede kjent fra MAT1110)

Vi skal integrere en skalar f eller en vektor $\boldsymbol{F}$ langs en kurve γ. Langs kurven tenker vi oss infinitesimale kurveelementer $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, og vi forutsetter at kurven er tilstrekkelig glatt at det er fornuftig å tenke på kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ som tangenter til kurven. Kurven er orientert, dvs. den går fra et punkt til et annet i en gitt retning som er indikert ved retningen til $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vi kan være interessert i å regne ut kurveintegraler av typen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F}\mathrm{d}r, \qquad \int_\gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma f\,\mathrm{d}r, \qquad \text{etc.}$$

langs kurven γ. Her er $\mathrm{d}r = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$.

I det spesielle tilfellet at kurven starter og slutter på samme sted vil integralet være rundt en lukket kurve, da skriver vi gjerne en sirkel rundt integraltegnet

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma \boldsymbol{F}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma \boldsymbol{F}\mathrm{d}r, \qquad \oint_\gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma f\,\mathrm{d}r, \qquad \text{etc.}$$

Noen ganger, for eksempel for å implementere kurveintegraler på datamaskin, kan vi tenke oss at kurven er delt opp i rette kurveelementer av endelig lengde, $\Delta\boldsymbol{r}_i$, og tilnærme kurveintegralet ved en sum over kurveelementene, for eksempel $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$. I grensen at $|\Delta\boldsymbol{r}_i|\to 0$ går summen over til et integral, $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \to \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Vi skal la kurven være parametrisert av en parameter t. Noen ganger kan vi tenke oss at parameteren er tiden som løper mens vi flytter oss langs kurven, andre ganger kan vi tenke oss at parameteren er avstanden tilbakelagt langs kurven, men parameteren trenger verken å være tid eller avstand. Når parameteren øker fra t til $t+\Delta t$ vil vi forflytte oss langs kurven

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \approx \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Delta t.$$

I grensen at $\Delta t\to 0$ blir forflytningen infinitesimal og vi skriver $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$. I det spesielle tilfellet at parameteren kan tolkes som tid, så beveger vi oss langs kurven med hastighet $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

Eksempel: Omkretsen til en sirkel med radius R

La kurven γ (altså sirkelen) være parametrisert ved vinkelen θ:

$$\boldsymbol{r}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j} \qquad \text{med} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Vi har

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-R\sin\theta\boldsymbol{i} + R\cos\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta$$

og

$$\mathrm{d}r = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = R\,\mathrm{d}\theta$$

og omkretsen blir

$$\oint_\gamma \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R.$$

Eksempel fra fysikk: arbeid = kraft ganger vei

Dersom en konstant kraft $\boldsymbol{F}$ virker over en rettlinjet bevegelse $\Delta\boldsymbol{r}$ så er arbeidet utført av kraften $\Delta W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$.

De fysiske enhetene kan være følgende: Arbeid (energi) kan måles i Joule (J = N m = $\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$), kraft kan måles i Newton (N = $\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}$) og vei kan måles i meter (m). Vi har J = N m.

Dersom kraften ikke er konstant, eller veien ikke er rett, så tar vi først grensen at forflytningene blir infinitesimale, $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, og integrerer, og vi får arbeidet uttrykt ved kurveintegralet

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

To spørsmål om kurveintegraler

Dersom vi skal beregne et kurveintegral som starter i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og ender opp i et annet punkt $\boldsymbol{r}_1$, så kan det være mange veier for å komme seg fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}_1$, og det kan være mange måter å parametrisere hver vei. To spørsmål dukker opp:

- Gir forskjellige parametriseringer av samme vei samme svar?
- Gir forskjellige veier mellom samme endepunkter samme svar?

Det første spørsmålet er hva som omhandles av LH setning 3.3.6 for skalarfelt og av LH setning 3.4.5 for vektorfelt. Setningene sier at to parametriseringer av samme kurve skal gi samme svar for kurveintegralet. Vi skal straks gi et eksempel som viser hvor viktig det er at forutsetningene for å bruke disse setningene må være oppfyllt!

Eksempel: Friksjonskraft

Friksjon forsøker å bremse en bevegelse, typisk vil friksjonskraften være rettet motsatt hastigheten. Det er vanlig at friksjonskraften øker med hastigheten. Den enkleste modellen for friksjonskraft er at den er proporsjonal med hastigheten. La oss anta formelen $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$ hvor $\mu > 0$ er en friksjonskoeffisient og $\boldsymbol{v}$ er hastigheten vi beveger oss med.

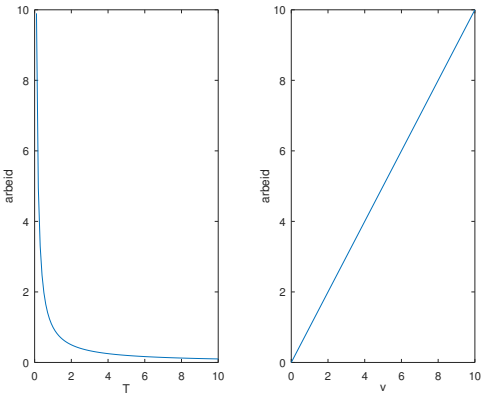
For å studere friksjonskraft kan det være naturlig å velge tiden t som parameter. Vi betrakter $\boldsymbol{r}(t)$ som representasjon av banen eller kurven γ som vi beveger oss langs. Hastigheten er $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, følgelig har vi $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$.

Finn arbeidet som friksjonskraften $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$ gjør for rettlinjet bevegelse med konstant hastighet langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$

La oss anta at vi forflytter oss en avstand L i løpet av en tid T med konstant hastighet. Farten er $v = L/T$. Hastigheten er $\boldsymbol{v} = \frac{L}{T}\boldsymbol{i}$. Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$, og arbeidet blir

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^T -\mu v^2\,\mathrm{d}t = -\mu\frac{L^2}{T} = -\mu L v$$

Svaret forteller oss at arbeidet avhenger av tiden vi bruker på å flytte oss den gitte avstanden, alternativt avhenger den av farten vi beveger oss med. Jo fortere vi beveger oss, jo kortere tid bruker vi, og jo større blir arbeidet.



Dette har en viktig praktisk anvendelse: Tenk deg at du skal kjøre bil en viss strekning, og at friksjon oppfører seg slik som modellen over. Dersom du øker farten til det dobbelte så kan du forvente å bruke dobbelt så mye drivstoff! Dersom du reduserer tiden til det halve så kan du forvente å bruke dobbelt så mye drivstoff! Dette fordi arbeidet som gjøres av friksjonskreftene vil øke. Det kan faktisk være lurt å kjøre litt saktere enn fartsgrensen dersom du ønsker å kjøre økonomisk!

Eksemplet med arbeidet utført av friksjonskraft ser ut til å være i strid med LH sats 3.4.5 fordi kurveintegralet ser ut til å avhenge av parametriseringen av én og samme kurve?

Svaret er at LH sats 3.4.5 ikke gjelder i dette tilfellet fordi friksjonskraften ikke er en entydig funksjon av posisjon. Den avhenger av nemlig av hvordan bevegelsen skjer. I dette tilfellet er parametriseringen et uttrykk for hvordan bevegelsen skjer.

Det var for å unngå slike problemer at vi avgrenset definisjonen av et felt til å være en entydig funksjon av posisjon. Vi husker fra første forelesning at friksjonskraft, Coriolis-kraft og Lorentz-kraft er ikke-entydige funksjoner av posisjon fordi de avhenger av hvordan en bevegelse skjer.

LH sats 3.3.6/3.4.5 gjelder for felt. Friksjonskraft er ikke et felt i henhold til vår avgrensning av begrepet.

Noen eksempler på kurveintegraler av felt

Eksempel: Vi betrakter vektorfeltet $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, og lar γ være x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$, regn ut $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Parametrisering 1: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}$ for $0 \leq t \leq 2$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{F} = t\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 2$.

Parametrisering 2: $\boldsymbol{r}(t) = 2t^2\boldsymbol{i}$ for $0 \leq t \leq 1$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{F} = 2t^2\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 8t^3\,\mathrm{d}t = 2$.

At vi fikk samme svar stemmer med LH setning 3.4.5.

Eksempel: La $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ være samme vektorfelt som før, men la γ nå være halvsirkelen med sentrum i $(x = 1, y = 0)$ fra origo til $(x = 2, y = 0)$ i øvre halvplan. Vi har altså samme vektorfelt og samme start- og endepunkt for kurven, men den går langs en annen vei.
Vi velger parametriseringen $\boldsymbol{r}(\theta) = (1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$ for $0 \leq \theta \leq \pi$.
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$ og $\boldsymbol{F} = (1 - \cos\theta)\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$, og følgelig får vi $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2$.

Det foregående eksemplet viser at et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ kan gi samme verdi for kurveintegralet mellom to endepunkter selv om vi velger forskjellig vei mellom de to endepunktene. Dette er ikke en konsekvens av LH setning 3.4.5!
Vi skal snart se at det finnes eksempler på vektorfelt som kan gi enten lik eller ulik verdi for kurveintegralet dersom vi velger forskjellige veier mellom de to endepunktene.

Oppsummering av kurveintegraler så langt

For å oppsummere hva vi har utforsket så langt kan vi lage en tabell for å angi om integralet

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

nødvendigvis har samme verdi uavhengig av parametriseringen av samme vei γ eller uavhengig av veien γ mellom de samme endepunktene:

$\boldsymbol{F}$ er	ulik parametrisering langs samme vei	ulike veier mellom samme endepunkter
et felt	ja (LH setning 3.4.5)	?
ikke et felt	nei	nei