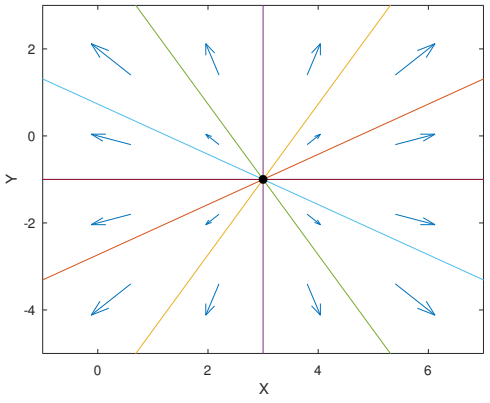
MEK1100 forelesning 8, 7/2–2024 ved Karsten Trulsen

**Først litt regneøvelse:**

**Eksempel: Finn strømlinjer og vektor-pileplot for**: $\boldsymbol{v} = (x-3)\boldsymbol{i} + (y+1)\boldsymbol{j}$

Strømlinjene er løsninger av $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Dette gir differensiallikninga $(y+1)\mathrm{d}x - (x-3)\mathrm{d}y = 0$ som har løsning $\ln|y+1| - \ln|x-3| =$ konstant. Denne kunne vi ha satt inn i en "contour"-kommando på datamaskin, men det er kanskje mer elegant å skrive om til $y = \alpha(x-3) - 1$ for vilkårlig $\alpha$. Dette gjenkjenner vi som alle rette linjer gjennom punktet $(3, -1)$.

Videre ser vi at feltet ikke har singulære punkter, men det har et stagnasjonspunkt ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) i $(3, -1)$ som vi kan markere med en fet prikk.




## Kan kurveintegralet av et felt avhenge av veien mellom to endepunkter?

Forrige gang så vi et eksempel på at kurveintegralet av et vektorfelt mellom to endepunkter kan gi samme svar langs to forskjellige veier. Nå skal vi se at svaret også kan være forskjellig langs to forskjellige veier.

**Eksempel: Kurveintegralet langs to forskjellige veier kan gi forskjellig svar.**

La $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ og la oss integrere fra $(x = 1, y = 0)$ til $(x = -1, y = 0)$ langs to forskjellige veier:

**Vei 1:** $x$-aksen fra $x = 1$ til $x = -1$. Velg parametrisering $\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i}$ for $-1 \le t \le 1$.

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = -t\boldsymbol{j}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.

**Vei 2:** Halvsirkelen med radius 1 og med sentrum i origo i øvre halvplan ($y \ge 0$). Velg parametrisering $\boldsymbol{r}(t) = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$ for $0 \le \theta \le \pi$.

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$ og $\boldsymbol{v} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$ og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi \sin^2\theta + \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi$.

For å komme videre må vi først introdusere sirkulasjon:

**Definisjon av sirkulasjon**
Sirkulasjonen til et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ rundt en lukket kurve $\gamma$ er gitt ved kurveintegralet

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Sirkelen rundt integraltegnet indikerer at $\gamma$ er en lukket kurve.

**Eksempel: Finn sirkulasjonen langs en sirkel med radius $R$ rundt en karusell.**

Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. La kurven være parametrisert med vinkelen $\theta$ slik at $\boldsymbol{r}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j}$. Vi får

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \omega R^2 \,\mathrm{d}\theta = 2\pi\omega R^2$$

**Eksempel: Finn sirkulasjonen langs en sirkel med radius $R$ rundt en "kilde" i origo.**

Velg hastighetsfeltet lik posisjonsvektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$. La kurven være parametrisert med vinkelen $\theta$ slik at $\boldsymbol{r}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j}$. Ettersom $\boldsymbol{v}$ står vinkelrett på $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ får vi

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

## Definisjon av "konservativt" vektorfelt

Vi har den noe spesielle situasjonen at våre tre lærebøker har hver sin måte å definere hva vi mener med et "konservativt" vektorfelt:

(I) M (s.28): $\boldsymbol{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en vilkårlig lukket kurve $\gamma$.

(II) GF (s.100): $\boldsymbol{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor $\gamma_1$ og $\gamma_2$ er to forskjellige og vilkårlige kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) LH (s.202): $\boldsymbol{F}$ er et konservativt vektorfelt dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at $\phi$ er et skalarpotensial.

Disse tre utsagnene er ekvivalente, og snart skal vi føye til et fjerde utsagn som også er ekvivalent, nemlig:

(IV) Vektorfeltet er konservativt dersom det er virvelfritt.

**La oss vise at (I) er ekvivalent med (II):** Velg to punkter A og B, legg en vilkårlig lukket kurve $\gamma$ gjennom disse to punktene, splitt den lukkede kurven opp i to deler $\gamma_1$ og $\gamma_2$ som begge har endepunkter A og B således at $\gamma$ er $\gamma_1$ etterfulgt av $-\gamma_2$. Vi har

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Dersom sirkulasjonen rundt en vilkårlig lukket kurve er lik null (venstre side er lik null), så er de to integralene på høyre side like. Da er altså kurveintegralet uavhengig av vei. Motsatt har vi at dersom kurveintegralene på høyre side er like, altså at kurveintegralet er uavhengig av vei, så er sirkulasjonen rundt den lukkede kurven lik null.

**La oss vise at (III) impliserer (II):** La oss si vi skal integrere langs en kurve $\gamma$ som går fra punkt $A$ til punkt $B$, og vi antar at det finnes et skalarpotensial $\phi$, i så fall har vi

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma \mathrm{d}\phi = \phi|_A^B = \phi|_B - \phi|_A$$

Legg merke til at vi har brukt formelen for totalt differensial $\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\phi$. Følgelig ser vi at resultatet kun avhenger av endepunktene og ikke veien mellom endepunktene.

**La oss vise at (II) impliserer (III):** I dette tilfellet antar vi at integralet mellom to punkter er uavhengig av veien, og vi skal vise at det i så fall eksisterer et skalarpotensial. Vi lar oss i så fall inspirere av utledningen i M kapittel 3.2.1 hvor de konstruerer et skalarpotensial ved et kurveintegral

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

hvor vi står fritt til å velge integrasjonsveien fra origo $\boldsymbol{0}$ til det vilkårlige punktet $\boldsymbol{r}$ fordi (II) forutsetter nettopp at kurveintegralet er uavhengig av vei. Det eneste som gjenstår er å vise at gradienten til $\phi$ er lik $\boldsymbol{F}$:

La oss skrive $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$. I det følgende viser vi at $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x$, tilsvarende beregninger kan gjøres for de to andre partiellderiverte: La oss splitte opp veien fra origo til $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ i tre rette linjestykker: $\gamma_z$ går fra $(0,0,0)$ til $(0,0,z)$, $\gamma_y$ går fra $(0,0,z)$ til $(0,y,z)$, og $\gamma_x$ går fra $(0,y,z)$ til $(x,y,z)$. Vi kan da skrive kurveintegralet

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \int_0^z F_z(0,0,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_y(0,t,z)\,\mathrm{d}t + \int_0^x F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t$$

Nå er det lett å se at $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x(x,y,z)$.

For å regne ut de to andre partiellderiverte lønner det seg å velge andre integrasjonsveier. Prøv å gjøre det selv!

**Advarsel:** Fysikere og matematikere har motsatt tradisjon med hensyn til å definere skalarpotensial med minustegn eller plustegn. Fysikere liker minustegn, matematikere liker plustegn. Det er vanlig å introdusere kraftpotensial $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ og elektrisk potensial $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ med minustegn, og hastighetspotensial $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ med plusstegn. Her er $\boldsymbol{F}$ kraftfelt og $\boldsymbol{E}$ er elektrisk felt og $\boldsymbol{v}$ er hastighetsfelt og $\phi$ er i hvert tilfelle det tilhørende skalarpotensialet.

Legg da merke til at klassisk mekanikk og elektromagnetisme vanligvis undervises på Fysisk institutt, mens fluidmekanikk og matematikk vanligvis undervises på Matematisk institutt.

Selv om de ulike definisjonene på "konservativt" felt er ekvivalente, så kan det likevel hende at noen er enklere å bruke enn andre, avhengig av situasjonen. Dette er noe vi må øve oss på, for å gjenkjenne hvilken strategi som er best.

## La oss utvide begrepet "konservativ" til å omfatte vektorer som ikke er felt!

Husk at dersom noe er et "felt" så har det en éntydig verdi på hvert sted. Vi har viktige eksempler på vektorer som ikke er felt, for eksempel friksjonskraft, Coriolis-kraft og Lorentz-kraft. Disse er ikke felt fordi de avhenger av hvordan en bevegelse skjer, og ikke bare veien som bevegelsen skjer langs. Det kan være en fordel å kunne utvide begrepet "konservativ" også til slike vektorer. Det første vi da legger merke til er at utsagn (III) og (IV) ovenfor ikke kan brukes, fordi de forutsetter éntydig verdi på hvert sted. Derimot kan vi stadig benytte utsagn (I) og (II).

**Eksempel: Er friksjonskraft konservativ?**

La oss ta modellen $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$. La $\boldsymbol{r}(t)$ være posisjonsvektor parametrisert med hensyn på tid $0 \leq t \leq T$. Vi har da $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$, og $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Sirkulasjonsintegralet, dvs. arbeidet, blir

$$W = \oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^T -\mu\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \mu v^2\,\mathrm{d}t < 0$$

Så lenge det er bevegelse så har integranden alltid samme fortegn, derfor kan dette integralet ikke være lik null. Det utføres arbeid selv om man kommer tilbake til utgangspunktet. Friksjonskraft er altså ikke konservativ.

Oversatt til dagligspråk kan vi si at dersom vi kjører en runde med bilen, så bruker vi en viss mengde bensin eller strøm, selv om vi kommer tilbake til der hvor vi startet!

**Oppsummering av kurveintegraler**

For å oppsummere hva vi har utforsket så langt kan vi lage en tabell for å angi om integralet

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

nødvendigvis har samme verdi uavhengig av parametriseringen av samme vei $\gamma$ eller uavhengig av veien $\gamma$ mellom de samme endepunktene:

| $\boldsymbol{F}$ er | ulik parametrisering langs samme vei | ulike veier mellom samme endepunkter |
|---|---|---|
| et konservativt felt | ja* | ja† |
| et felt som ikke er konservativt | ja* | nei |
| ikke et felt | nei | nei |

$*$ dekkes av LH sats 3.4.5
† dekkes av (I)-(IV) ovenfor