MEK1100 forelesning 9, 12/2–2024 ved Karsten Trulsen

Noen eksempler på å bestemme om et vektorfelt er konservativt

Eksempel: Er tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ konservativ?

Her er m en masse som er utsatt for tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$. Her skal vi ta den enkleste representasjonen av tyngdekraft, nemlig at tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er konstant innenfor et avgrenset område.

La oss sjekke om kurveintegral er uavhengig av vei: Skriv først $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ hvor x og y-aksene er horisontale og z-aksen peker vertikalt oppover. La γ være en kurve fra et punkt $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ til et punkt $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$. Vi trenger ikke parametrisere kurven i det hele tatt, vi trenger kun å bruke $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$, som gir $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{z_0}^{z_1} -mg\,\mathrm{d}z = mg(z_0 - z_1)$.

Vi ser derfor at kurveintegralet kun avhenger av start- og sluttpunkt, ikke veien, og følgelig vet vi at tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er konservativ.

Det er like enkelt å finne et potensial ϕ

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\nabla(mgz) = -\nabla\phi$$

Vi ser at det eksisterer et potensial $\phi = mgz$, og følgelig vet vi at tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er konservativ.

Legg merke til at ettersom problemstillingen om "tyngdekraft" mest sannsynlig kommer fra fysikk, så har vi satt minus-tegn foran gradienten i respekt for tradisjonen i fysikk-faget.

Eksempel: Er vektorfeltet $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$ konservativt?

Dersom vi setter $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, så har vi $r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = x^2 + y^2 + z^2$. Dersom vi tar gradienten finner vi $\nabla(r^2) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{r}$. Følgelig er det enkelt å finne et potensial ϕ

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = \nabla(\frac{1}{2}r^2) = \nabla\phi$$

Vi ser at det eksisterer et potensial $\phi = \frac{1}{2}r^2$, og følgelig vet vi at feltet er konservativt.

Legg merke til at denne problemstillingen antakelig kommer fra matematikk, derfor har vi satt plus-tegn foran gradienten slik som man ofte gjør i matematikk.

Eksempel: Er tyngdekraften i Newtons gravitasjonslov konservativ?

Newtons gravitasjonslov sier at en punktmasse M drar på en annen punktmasse m med en kraft

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

hvor m og M er de to massene, r er avstanden mellom dem, $\boldsymbol{i}_r$ er enhetsvektor i retningen fra legemet M til legemet m, G er den universelle gravitasjonskonstanten.

Vi legger massen M i origo og lar massen m være i posisjon $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Vi har $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ som før, og vi har $\boldsymbol{i}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Legg merke til at

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

og følgelig

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\left(-\frac{GmM}{r}\right) = -\nabla\phi$$

Ettersom tyngdekraften kan uttrykkes som gradienten av et skalarpotensial ϕ vet vi at den er konservativ.

Problemstillingen kommer definitivt fra fysikk, så har vi satt minus-tegn foran gradienten i respekt for tradisjonen i fysikk-faget.

Så tar vi et eksempel som er betydelig mer utfordrende:
(nesten litt for vanskelig)
La oss undersøke om vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

er konservativt. Se illustrasjon av feltet nedenfor.

Først kan vi undersøke om feltet $\boldsymbol{v}$ er gradienten til et skalapotensial ϕ. Det viser seg at dersom vi lar ϕ være vinkelen mellom x-aksen og posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ så er ϕ et skalarpotensial for $\boldsymbol{v}$.

Sett $\alpha = \tan\phi = \frac{y}{x}$. Man skulle tro dette burde bety at $\phi = \arctan\alpha$? Husk at den deriverte av arcustangens er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\arctan\alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$. Ved hjelp av kjerneregelen får vi $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$ og $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$. Følgelig ser vi at

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} = \nabla\phi$$

Følgelig ser vi at feltet kan uttrykkes som gradienten av et skalarpotensial, så vi skulle tro at feltet var konservativt, men vent nå litt ... Dersom α får lov til å variere over hele den reelle linja så varierer ikke $\phi = \arctan\alpha$ over mer enn halve sirkelen, men vi trenger jo å komme rundt hele sirkelen?

La oss derfor prøve en alternativ strategi, nemlig å undersøke om sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ langs en vilkårlig lukket kurve γ er lik null. La kurven være en sirkel rundt origo. Velg for eksempel sirkelen med radius lik 1 og sentrum i origo, med parametrisering $\boldsymbol{r}(\phi) = \cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\phi\boldsymbol{j}$ for $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\phi$ og $\boldsymbol{v} = \frac{-\sin\phi\boldsymbol{i}+\cos\phi\boldsymbol{j}}{\cos^2\phi+\sin^2\phi} = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin^2\phi + \cos^2\phi)\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi$ og følgelig

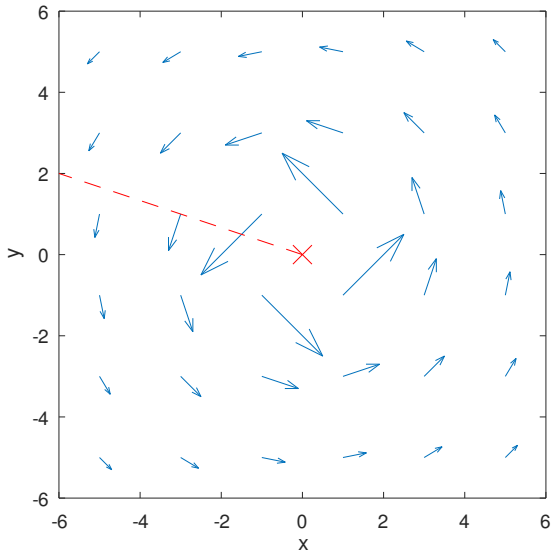
$$\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Det faktum at sirkulasjonen rundt origo er ulik null tyder på at feltet ikke er konservativt!

Løsningen på dette mysteriet er å legge merke til at origo er et singulært punkt. Vinkelen ϕ er ikke entydig definert dersom vi går helt rundt det singulære punktet origo. Vi må begrense variasjonene i vinkelen slik at den holder seg entydig definert for å anvende sirkulasjons-kriteriet for konservativt felt. Dette kan gjøres ved å lage et "kutt" i planet, fra origo og utover, slik at integrasjonskurven γ ikke får lov til å krysse "kuttet".

Feltet blir følgelig konservativt på betingelse av at vi holder oss innenfor et avgrenset område som ikke inkluderer eller omslutter det singulære punktet i origo.

I figuren nedenfor er feltet illustrert som et vektor pileplot. Det singulære punktet i origo er markert med et rødt kryss. Én mulig måte å lage et "kutt" er markert med den røde stiplede linja fra origo oppover til venstre.



Flateintegral

(M 2.3, se også LH 6.1–4)

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ over en flate S. Langs flaten tenker vi oss infinitesimale flateelementer $\mathrm{d}\sigma$ og tilhørende enhetsnormalvektorer $\boldsymbol{n}$. Vi forutsetter at flaten er tilstrekkelig glatt til at det er fornuftig å tenke på flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ som normalt på flaten og flateelementet $\mathrm{d}\sigma$ som tangent til flaten. Vi forutsetter også at flatenormalvektoren er orientert i henhold til problemstillingen vi betrakter, dette krever at flaten er orienterbar. En flate er orienterbar dersom det går an å male hver side av flaten med forskjellige farger. Noen flater er ikke orienterbare, for eksempel Möbius båndet og Klein flasken, se for eksempel matematikk.org om "Møbiusbånd og kleinflaske" eller Wikipedia om "Möbius-bånd" eller M.C.Escher sin illustrasjon her.

Vi skal være interessert i å regne ut flateintegraler av typen

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S f\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S f\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \text{etc.}$$

over flaten S.

Noen ganger kan det være greit å tenke seg at flaten er delt opp i plane flateelementer med areal $\Delta\sigma_i$ med tilhørende normalvektorer $\boldsymbol{n}_i$, og at vi kan tilnærme flateintegralet ved en sum over flateelementene, for eksempel $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i$. I grensen at flateelementene blir infinitesimale (uendelig små) $\Delta\sigma_i\to\mathrm{d}\sigma$ vil summen gå over til et integral, $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta\sigma_i\to\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$.

Eksempel: Arealet av et rektangel med sidekanter a og b

La rektanglet være orientert med sidekant a langs x-aksen og sidekant b langs y-aksen. La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, og la oss ta x-integralet først:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^b \int_0^a \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^b [x]_{x=0}^a \,\mathrm{d}y = \int_0^b a\,\mathrm{d}y = [ay]_0^b = ab$$

I dette tilfellet hadde det vært like enkelt å bytte om på rekkefølgen:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^a \int_0^b \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^a [y]_{y=0}^b \,\mathrm{d}x = \int_0^a b\,\mathrm{d}x = [bx]_0^a = ab$$

Eksempel: Arealet mellom x-aksen og kurven $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi$

La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, og la oss ta y-integralet først:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi [y]_{y=0}^{\sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

Det er mye vanskeligere å bytte på rekkefølgen:

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [x]_{x=\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi - 2\arcsin y\,\mathrm{d}y \\ = \Big[\pi y - 2y\arcsin y - 2\sqrt{1-y^2}\Big]_0^1 = 2\end{aligned}$$

Vi ser at det virkelig lønner seg å velge en rekkefølge som er enkel å håndtere!

Begrepene fluks, flukstetthet og integrert fluks

Generelt sier vi at integraler av typen

$$Q = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

er fluks-integraler. Ordet "fluks" kommer fra latin og betyr "strømning". Størrelsen Q kan vi kalle "integrert fluks", og størrelsen $\boldsymbol{F}$ kan vi kalle "flukstetthet". Her er flukstettheten en vektor-størrelse mens den integrerte fluksen er en skalar.

La oss sjekke de fysiske enhetene: Det infinitesimale flateelementet $\mathrm{d}\sigma$ er et areal. Enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er dimensjonsløs. Følgelig må den fysiske enheten til flukstetthet være lik den fysiske enheten til integrert fluks delt på areal.

Hva slags størrelse skal vi assosiere med kun ordet "fluks"? Skal det bety integrert fluks Q eller flukstetthet $\boldsymbol{F}$? Dessverre har forskjellige fagområder hver sine tradisjoner. I elektromagnetisme er det vel etablert at ordet "fluks" referer til "integrert fluks". For anvendelser innen transportfenomener, for eksempel fluidmekanikk, er det vanlig at ordet "fluks" refererer til "flukstetthet".

For å gjøre forvirringen komplett finner vi dessuten lett tekster som bruker begrepet "fluks" uten å gjøre en slik distinksjon. Se for eksempel LH (2. utgave 2015): I kapittel 6.12 står det i avsnittet midt på side 678 først at $\boldsymbol{F}$ er en fluks, og like etterpå står det at $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} R$ er en fluks, hvor R er arealet til en flate som $\boldsymbol{F}$ strømmer igjennom. Definisjon 6.12.1 på side 680 sier at integralet $\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$ (oversatt til vår notasjon) er en fluks. LH benytter altså begrepet "fluks" som fellesbegrep for de to begrepene "integrert fluks" og "flukstetthet".

Kanskje opphavsmannen til denne forvirringen er James Clerk Maxwell som skrev i sin bok "Treatise on Electricity and Magnetism" i 1892:

> In the case of fluxes, we have to take the integral, over a surface, of the flux through every element of the surface. The result of this operation is called the surface integral of the flux. It represents the quantity which passes through the surface.

Her referer ordet "fluks" til "flukstetthet", det er merkelig ettersom Maxwell bidro betydelig til å etablere elektromagnetisme som fag (hvor man som nevnt ovenfor har tradisjon for å la "fluks" bety integrert fluks). Se forøvrig utmerket diskusjon om terminologi på Wikipedia: Flux.

For å unngå forvirring kan vi si enten "integrert fluks" eller "flukstetthet" når det er viktig å skille mellom begrepene, og vi kan begrense bruken av kun ordet "fluks" til situasjoner det ikke spiller noen rolle hvilket av begrepene vi refererer til.

Eksempel: Volumfluks — strømingen i ei elv gjennom snitt på tvers
Ei elv har konstant hastighet $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$ i x-retning, og tverrsnitt S normalt på x-aksen med konstant areal A. Finn volumfluksen $Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$.
Først bestemmer vi at flatenormalvektoren skal være orientert i positiv x-retning, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$. Vi kan for eksempel sette $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$. Deretter regner vi ut

$$Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_S v\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \, \mathrm{d}\sigma = v \int_S \mathrm{d}\sigma = vA$$

hvor vi benyttet at v er konstant så den kunne settes utenfor integralet.

Grunnen til at dette kalles volumfluks innser vi ved å skjekke de fysiske enhetene: $[v] = \mathrm{m/s}$, $[\mathrm{d}\sigma] = \mathrm{m}^2$, enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$ er dimensjonsløs $[\boldsymbol{n}] = 1$, og følgelig $[Q] = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, hvor vi lar notasjonen $[\cdot]$ bety "enheten til". Dette er en fornuftig enhet for volumfluks.

Vi kan spørre om det går an å få mere vann ut av elva dersom vi benytter et skrått tverrsnitt istedenfor et rett tverrsnitt? Et skrått tverrsnitt vil jo ha større areal. Dette ser vi på neste gang!