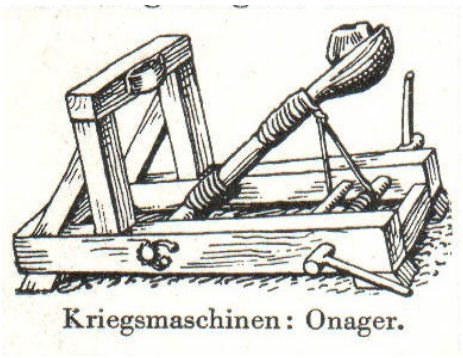
Gode gamle dager

Vi skal i denne oppgaven betrakte en romersk katapult, som gjerne kalles en *Onager* etter en variant av villesel fra Iran/midtøsten. Katapulten var torsjonsdrevet, altså en katapult der kastearmen var festet mellom en bunt tvinnede tau som var festet mellom noen bjelker. Se figur 1. Vi antar katapultens



Figur 1: Illustrasjon av en onager. Bilde fra det offentlige domene.

utskytningsmekanisme kan behandles som en vridd sylinder (kapittel 12.6 i Gjeviks kompendium).

a) Regn ut arbeidet det krever å sette katapulten i skyteklar stilling, gitt at den starter med kastearmen rettet i vertikal retning, og at den kan senkes med $\Delta\theta = \pi/2$ radianer. Her kan du anta at hvis onagerens bredde er L, så vil skytemekanismen kunne betraktes som vridningen av to sylindere med radius a som er $L/2$ lange.

Hint: Arbeidet er relatert til dreiemomentet M ved

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} M(\theta)\, d\theta. \tag{1}$$

b) Anta katapulten skyter en stein som veier 20 kg en avstand på 130 m, hva må utgangsfarten til katapulten ha vært? Vi antar at katapultarmen er to meter lang og at utgangsfarten er rettet horisontalt. Se bort fra luftmotstand.

c) Anta det tok et sekund fra artilleristen trakk i den figurative avtrekkeren i katapulten, til steinen var skutt ut i farten dere fant i oppgave b). Hva var den midlere akselerasjonen? Hvor stor var skuddkraften?

d) Anta en hundre prosent effektiv katapult, altså at 100% av den kinetiske energien i bevegelsen til katapultarmen ble overført til steinen. Beregn den effektive skjærmodulen μ for tauet i katapulten. Du kan anta at radien $a = 5$ cm.

Bonusoppgave - Men hva med luftmotstanden?

De resterende oppgavene går utenfor pensum i MEK2200, og er mer for de spesielt interesserte. Det kan også her være lurt å benytte seg av numeriske

verktøy. Luftmotstand modelleres ofte ved

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho u^2 C_d A, \tag{2}$$

der ρ er fluidets (her luft) massetetthet, u er objektets (midlere) hastighet, C_d er en dimensjonsløs friksjonskoeffsient og A er tverrsnittsarealet til objektet. Vi antar i denne oppgaven at katapultsteinen er perfekt symmetrisk med radius R. Friksjonskoeffsienten setter vi til $C_d = 0.47$ og massetettheten til luft og stein settes til henholdsvis $\rho_l = 1.2$ kg/m^3 og $\rho_s = 2000$ kg/m^3. Anta for enkelthetens skyld at luftmotstanden kun virker i x-retning.

e) Beregn steinens radius og tverrsnittsareal.

f) Bruk utslippshastigheten du beregnet i oppgave b) til å beregne luftmotstanden på steinen. Hvis du antar en konstant luftmotstand, hvor langt kommer steinen nå? Kunne vi rimelig ignorere luftmotstanden i oppgave b)?

Hvis vi betrakter den horisontale bevegelseslikningen for katapultsteinen, legger vi merke til at likning 2 resulterer i en ikkelineær differensiallikning for posisjonen $x(t)$ til steinen. Disse likningene er svært vanskelige å løse direkte. En vanlig løsning på sånne problemer er å gjøre likningene lineære ved hjelp av såkalte iterative løsere. Dette skal vi prøve på nå. La oss heller tilnærme likning 2 med

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho u_k u_{k-1} C_d A, \tag{3}$$

der u_k er vårt k-te gjett på løsningen av likninen, med u_{k-1} det forrige gjettet. Bevegelseslikningen i x-retning blir da:

$$m\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{1}{2}\rho u_k(t) u_{k-1}(t) C_d A \tag{4}$$

g) Sett u_0 lik utslippshastigheten i oppgave b), beregn den nye posisjonskurven $x_1(t)$ og hastighetsprofilen $u_1(t)$ til katapultkula. Hva er den nye utslippshastigheten?

h) Bruk resultetet ditt for hastighetsprofilen $u_1(t)$ til å beregne $u_2(t)$. Hva er den nye utslippshastigheten. Hvor mange iterasjoner må du gjøre før endringen i utslippshastighet mellom løsning u_k og u_{k-1} er mindre enn 1 m/s? Hvor mange før forskjellen er mindre enn 0.1 m/s? Hvis du regner for hånd kan det være lurt å heller sette $u_{k-1}(t)$ lik utslippsfarten ved forrige tidssteg for å forenkle beregningene.

i) Hva er den reelle skjærmodulen μ i katapulten hvis du tar hensyn til luftmotstand? Er den realistisk?