

Ekstraoppgaver i MEK2200

Dette dokumentet inneholder en del ekstraoppgaver ment å komplementere oppgavesettet i Gjeviks bok. Oppgavene rører ofte på temaer som kan være litt mer avanserte enn det som står i boka, er gjerne litt lengre, og fort litt vanskeligere enn vanlige ukesoppgaver. Mist derfor ikke motet om du finner enkelte deloppgaver vanskelige å løse. Om noe er uklart, eller om du sitter fast, så diskuteres oppgavene i gruppetimene, og om du ikke har mulighet til å møte opp, kan du forsøke å sende mail til meg, gruppelæreren, og så svarer jeg hvis jeg har tid/mulighet/kapasitet til det.

Indeksnotasjonsoppgaver

Vedlagt er et ekstra sett med utvalgte oppgaver fra *Vector Calculus* av P.C. Matthews om indeksnotasjon.

- 1) Med indeksnotasjon, undersøk hvorvidt $\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}$ for et vilkårlig¹ vektorfelt $\mathbf{v}$.
- 2) La oss betrakte tensoren²

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{hvis } i = j, j = k \text{ eller } i = k, \\ 1, & \text{hvis } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ eller } (2, 3, 1), \\ -1, & \text{hvis } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ eller } (2, 1, 3). \end{cases} \quad (1)$$

Vis at det i -te vektorelementen i kryssproduktet mellom to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er gitt ved:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Merk at den alternierende tensoren ε_{ijk} er relatert til Kronecker-deltaet via følgende identitet³:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (2)$$

Denne identiteten kan vise seg å være svært viktig for å evaluere vektoruttrykk bestående av flere kryssprodukt.

- 3) Bevis de følgende vektoridentitetene for skalarfeltene f, g og vektorfeltene $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:
 - a) $\nabla \times \nabla f = 0$.
 - b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$.
 - c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
 - d) $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f\nabla \cdot \mathbf{u}$.
 - e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$
 - f) $[\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
 - g) $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$.
 - h) $\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$.
 - i) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.

- 4) La $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ være posisjonsvektoren, med $r = |\mathbf{r}|$. Vis at

$$\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{r}/r.$$

for et vilkårlig, en gang deriverbart skalarfelt $f(r)$.

¹og to ganger deriverbart

²av tredje orden

³Å bevise den er mye skriving da dette er en tensor av fjerde orden. For tredimensjonale vektorfelter er dette $3^4 = 81$ ledd. Men diskuter gjerne med en klassekamerat hvorvidt identiteten virker rimelig eller ikke

Tensoroppgaver

- 5) Divergensteoremet⁴ gir følgende relasjon mellom fluksen gjennom en flate S og divergensen til et vektorfelt $\mathbf{v}$ innenfor volumet V omsluttet av flaten:

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (3)$$

Merk, her betegner $\oint_S$ et flateintegral (vanligvis et dobbeltintegral), mens $\int_V$ betegner et volumintegral (vanligvis et trippelintegral). Skriv divergensteoremet på indeksnotasjonform, og utled så formen for divergensteoremet for en annenrangs tensor T_{ij} .⁵

- 6) La T_{ij} være en antisymmetrisk tensor (Altså $T_{ij} = -T_{ji}$. Vis at $T_{ii} = 0$, og at antisymmetrien vedvarer i et rotert referansesystem, altså at $T'_{ij} = -T'_{ji}$
- 7) Bevegelsen til et legeme med volum V som roterer med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$ vil kunne beskrives ved følgende hastighetsfelt:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (4)$$

der $\mathbf{r}$ er posisjonsvektoren fra rotasjonssentrumet.

- a) Vis at hvis angulærmomentet $\mathbf{L}$ til en partikkel med masse m er definert ved $\mathbf{h} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, så blir det totale angulærmomentet $\mathbf{L}$ til legemet:

$$\mathbf{L} = \int_V \rho (r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}) dV. \quad (5)$$

Hint, du kan trygt benytte deg av vektoridentitetene i oppgave 3).

- b) Vis så at hvis $\boldsymbol{\Omega}$ er en konstant, så kan angulærmomentet skrives på formen

$$H_i = I_{ij} \Omega_j, \quad (6)$$

der

$$I_{ij} = \int_V \rho (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV, \quad (7)$$

er treghetstensoren. Er treghetstensoren symmetrisk?

- c) Vis at for en kube med sidelengde $2a$ og rotasjonssentrum i Origo, så er treghetstensoren gitt ved

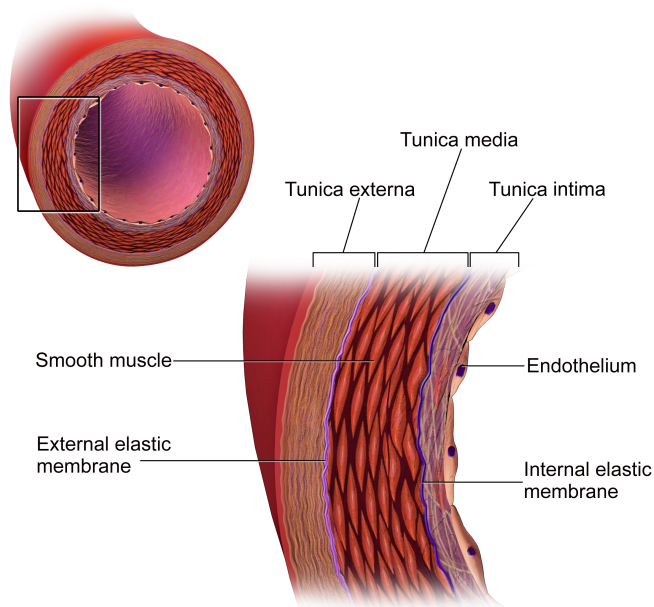
$$I_{ij} = \frac{2}{3} M a^2 \delta_{ij} \quad (8)$$

Hva betyr dette for vinkelen mellom angulærmomentet $\mathbf{H}$ og vinkelhastigheten $\boldsymbol{\Omega}$?

⁴Gauss sats i MEK1100

⁵Hint, start med å se hva som skjer med vektoren $T_{1,j}$

The Structure of an Artery Wall



Figur 1: Tverrsnitt av en artierie. Blausen.com staff (2014). "Medical gallery of Blausen Medical 2014". WikiJournal of Medicine 1 (2). DOI:10.15347/wjm/2014.010. ISSN 2002-4436.

Spenningstensorer og prinsipspenninger

Blodig alvor

I denne oppgaven skal vi regne på blodstrømninger. Vi kan tenke oss at en artierie kan betraktes som en perfekt sylinder, se figur 1. Vi skal begynne med å tenke på blod som en inkompressibel Newtonsk væske⁶, som har spenningstensor $\mathcal{P}$ gitt ved:

$$\mathcal{P}_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (9)$$

Her er μ viskositeten, $\mathbf{v}$ er hastigheten til blodet og p er blodtrykket. Vi skal anta at strømmen er uavhengig av vinkelkoordinaten θ , og la blodåren gå langsmed z -aksen. Denne oppgaven passer best som gruppeoppgave.

- Forklar hvorfor problemet kan forenkles til et todimensjonalt problem i xz -planet, og dermed at vi kan forenkle problemet til kartesiske koordinater. Videre, hva blir normalvektoren til blodåreveggene på hver side av tverrsnittet vi har konstruert?
- Finn normal og tangensialspenningen på blodåreveggen.

⁶et begrep dere vil bli godt kjent med i løpet av kurset.

- c) Forklar hvorfor $v_x = 0$ er en nødvendig betingelse å sette på hastighetsfeltet. Hvilken implikasjon har det på hastighetskomponenten i z -retning? Kan v_z være en funksjon av z ?

For denne typen trykkdrevet strøm⁷ er en rimelig hastighetsprofil:

$$v_z(x) = -\frac{\partial p}{\partial z} (L - x) x, \quad (10)$$

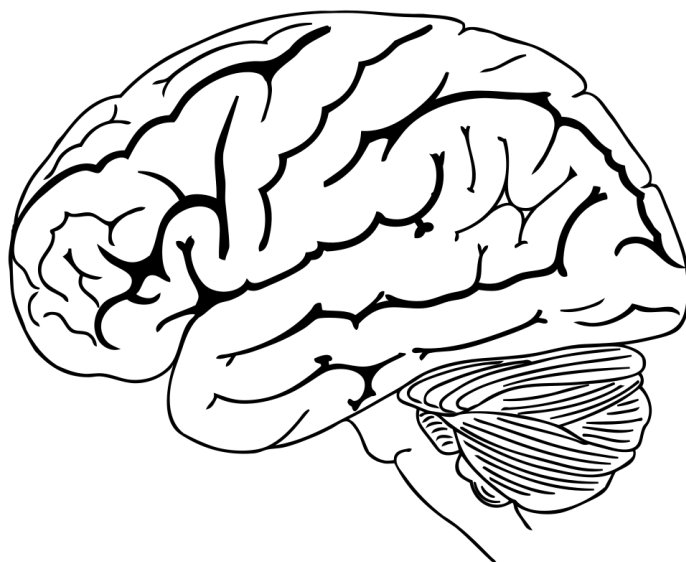
med L lik diameteren på blodåren.

- d) Finn trykkfeltet p slik at normal og tangensialspenninga er like store.
- e) Høyt blodtrykk regnes for å være en risikofaktor for flere ulike livstruende sykdommer. Hvilken effekt har høyt blodtrykk på stresset blodårene opplever? Må både tangensial- og normalspenninga øke?

⁷Hva er trykkilden?

En enkel hjernemodell

Vi skal i denne oppgaven regne på viskoelastisk deformasjon av en menneskelig hjerne. Vi kan tenke oss at hjernen er en perfekt ball med diameter $d = 10$ cm, og en Youngs modul $E_{\text{eff}} = 1.5$ kPa, og ballen vår er illustrert i figur 2. Vanlig intrakranielt trykk, altså trykket under kraniet, er på 7-15 mmHg (merk 1



Figur 2: En menneskehjerne

mmHg = 133.3 Pa), og vi velger for enkelthetens skyld anta at det intrakranielle trykket er 10 mmHg, eller da $P_{\text{ICP}} = 1333$ Pa. Vi starter med å anta at hjernen er et elastisk medium.

- Under systole⁸ kan blodtrykke øke med omlag 20 % sammenliknet med gjennomsnittsnivået. Hvis vi antar denne trykkforskjellen også manifesterer seg på hjerneoverflaten, hvor mye deformeres hjernevevet, hvis vi antar at deformasjonen er fullstendig elastisk. Er dette ekspansjon eller kontraksjon?
- Under diastole⁹ vil blodtrykke tilsvarende falle 20% sammenliknet med basisnivået. Hvor stor mye ekspanderer hjertet i dette tidsrommet? Hvis vi sammenlikner volumet under diastole og systole, hvor stor volumendring ser vi av hjernen relativt til volumet ved gjennomsnittlig trykknivå?

Vi skal nå se hvorvidt de viskoelastiske effektene har noe å si på responsen til hjernevevet. Kelvin-Voigt-modellen gir oss følgende *stress-strain*-relasjon:

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + \eta \frac{\partial \epsilon}{\partial t}(t). \quad (11)$$

Vi kan anta at $\eta = 20$ Pa · s.

⁸Delen av hjertesykklusen der hjertet trekker seg sammen

⁹Delen av hjertesykklusen der hjertet pumper seg opp

- c) Anta at trykket øker lineært under systole fra 10 til 12 mmHg i løpet av et sekund. Forklar hvorfor vi kan si $\sigma(t) = -2t$ under systole.

- d) Vis at

$$\epsilon(t) = -\frac{E}{2}t + \frac{2\eta}{E^2} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right).$$

er en løsning på likning 11, hvis vi antar $\epsilon(0) = 0$.¹⁰

- e) Hva er relaksasjonstida, altså tida det tar før systemet når likevekt og det viskøse bidraget er tilstrekkelig lite.

- f) Hvor mye deformerer hjernen seg i løpet av systolen?

Vi skal nå prøve å utvide modellen med en full hjertessyklus. Vi tenker den varierer sinusoidalt, altså at $\sigma(t) = 2 \sin(\omega t)$.

- g) Hvis perioden fra systole til systole er to sekunder, hva er frekvensen ω ?

- h) Vis at nå blir

$$\epsilon(t) = \frac{2}{E \left(1 + \left[\frac{\eta\omega}{E}\right]^2\right)} \sin(\omega t) - \frac{2\eta\omega}{E^2 \left(1 + \left[\frac{\eta\omega}{E}\right]^2\right)} \left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right).$$

er en løsning på likning 11, hvis vi antar $\epsilon(0) = 0$.

- i) Plott responsen som en funksjon av tid for en tidsperiode på 10 sekunder, når skjer de største deformasjonene, og er deformasjonene mindre eller større enn i deloppgave f) og b)?

¹⁰HINT: Likningen kan løses ved å løse likningen i to steg. En homogen løsning ϵ_h finner du ved å sette $\sigma(t) = 0$, og så løse for $\epsilon(t)$. Deretter, for å håndtere det inhomogene leddet, kan du gjette på en partikulærløsning ϵ_p . Dette er ikke en eksakt-vitenskap, men et lurt startpunkt er å gjette på en løsning som er "lik" som det inhomogene leddet, altså her en lineær funksjon av t .

Et deformasjonsfelt (18.1.1 i BG)

La oss betrakte tøyningfeltet $\mathbf{u}$ gitt ved

$$\mathbf{u} = ay\mathbf{i}.$$

- Finn tøyningstensoren ϵ_{ij} som svarer til $\mathbf{u}$.
- Finn prinsipalverdiene og prinsipalretningene til tøyningstensoren.
- Vis at gitt at $a \ll 1$, så vil feltet $\mathbf{u}$ deformere et kvadrat med sidelengde L og sentrum i origo og hjørner i punktene $(-L/2, 0)$, $(L/2, 0)$, $(0, -L/2)$ og $(0, L/2)$ til et rektangel. Vis og at den relative endringen i sidelengdene er lik prinsipalverdiene.

En spenningstensor (18.4.1 i BG)

I et kartesisk koordinatsystem (x, y, z) finnes spenningstensoren

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

der τ_1, τ_2 er konstanter.

- Finn spenningen på en flate med normalvektor $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$.
- Finn normal- og tangensialspenningen på samme flate.
- Anta at vi betrakter et isotropt og elastisk medium som følger Hookes lov. Finn komponentene i tøyningstensoren ϵ_{ij} som samsvarer med $\mathcal{P}$ i Likning 12.

En numerisk løser

Vi skal begynne så vidt på å bygge opp en numerisk løser av strømnings i viskøse fluider (under antagelsen om laminær strøm). La i denne oppgaven $v(x)$ være et ukjent skalarfelt på intervallet $[0, L]$, mens $f(x)$ er et kjent skalarfelt på samme intervall. Målet vårt er å lage en løser av Poisson-likningen gitt ved

$$\nabla^2 v = f, \quad (13)$$

for det endimensjonale tilfellet $v(x)$. Denne oppgaven ligger litt utenfor kjernepensum i MEK2200, men danner et grunnlag for kodeoppgaver vi kan regne ut senere.

- La $x_i \in [x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}]$ være en diskretisering av intervallet $[0, L]$. Vis at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{v(x_{i+1}) - 2v(x_i) + v(x_{i-1}))}{h^2}.$$

Gitt at diskretiseringen av intervallet er uniformt, altså at $h = x_{i+1} - x_i$ for alle i . Hint: Start med en andre ordens Taylorutvikling av v , der

$$v(x+h) = v(x) + h \frac{\partial v}{\partial x}(x) + h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) + h^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x) + \mathcal{O}(h^4).$$

Her er $\mathcal{O}(h^3)$ et feilledd, og $x_{i+1} = x_i + h$.

- b) Forklar hvordan resultatet i forrige oppgave impliserer at matrisemultiplikasjonen gitt ved:

$$Av = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} \quad (14)$$

er en diskretisering av det kontinuerlige uttrykket

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

. HINT: Hva blir matrisemultiplikasjonen på indeksnotasjon?

- c) Vi er nå nesten i mål. Hvis vi lar $f_i = f(x_i)$, ville det friste å uttrykke Likning 13 på følgende form

$$A_{ij}v_j = f_i. \quad (15)$$

Dette svaret er derimot ikke helt riktig, da vi for $i = 1$ og $i = N$ blir nødt til å forholde oss til de (hittil) ukjente verdiene v_0 og v_{N+1} . For å komme seg ut av denne litt vanskelige situasjonen, blir vi nødt til å håndheve noen randbetingelser. La oss anta at vi vet funksjonsverdien til v på randa, altså at v_0 og v_{N+1} allerede er kjente verdier. Beskriv hvordan Likning 15 må justeres for å sørge for at disse verdiene inkorporeres.

- d) Skriv et skript som implementerer det numeriske skjemaet vårt i ditt favorittprogrammeringsspråk. Skriptet skal ta som input-argumenter en domenelengde L , en punktmengde N og de ukjente randverdiene v_0 og v_{N+1} . La $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{L})$ eller en annen funksjon du er svært glad i.

En utvidet og effektiv numerisk løser

I forrige oppgave lagde vi en løser for Poisson-likningen, et verktøy som snart kommer til å vise seg å være uvurdelig. I denne oppgaven skal vi utvide løseren på to måter. Vi skal gjøre den mer effektiv, og gjøre at den kan løse mer fleksible problemer.

- e) Vi kan se fra definisjonen av matrisen A i likning 14 at matrisen er høyst regulær, og at det kanskje er mulig å radredusere den på en lur måte. Utleed en algoritme som eliminerer den nedre diagonal i matrisen A , slik at alle elementene under midtdiagonalen¹¹ er lik null.
- f) På tilsvarende vis som i oppgave e) kan vi radredusere bort diagonalen over midtdiagonalen, og dermed har vi redusert A til en matrise der kun elementene langsmed midtre diagonal ikke er null. Implementer dette og steget fra oppgave e) til den numeriske løseren din, og sammenlikn de to metodene for å løse det lineære systemet. Blir svaret identisk? Hvilken fremgangsmåte er raskest? Kjør koden din for $N = 1000$, $N = 10000$ og $N = 100000$.
- g) Det er ikke alltid vi vet funksjonsverdien til v på randa, men kanskje vi heller vet noe om v sin deriverte i stedet. Randbetingelser på formen

$$\nabla v = g,$$

der g er en kjent funksjon, kalles ofte for Neumann-betingelser. Hvis vi antar at vi har en Neumann-betingelse i $x = L$, vis at vi kan estimere $v_{N+1} = v(x_{N+1})$ til å være

$$v_{N+1} = v_N + \frac{h}{2}(g_{N+1} + g_N)$$

- h) Oppdater løseren til å kunne implementere enten Poisson- eller Neumann-betingelser ved både $x = 0$ og $x = L$.

Vi kan også tenke oss at det er tidseffekter som spiller inn. En enkel utvidelse til dette domenet er varmelikningen, som er gitt ved

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (16)$$

Vi skal nå gå litt utenfor pensum i MEK2200, og løse det ikke-stasjonære problemet gitt av likning 16.

- g) Forklar hvorfor

$$\frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} = f_i^n, \quad (17)$$

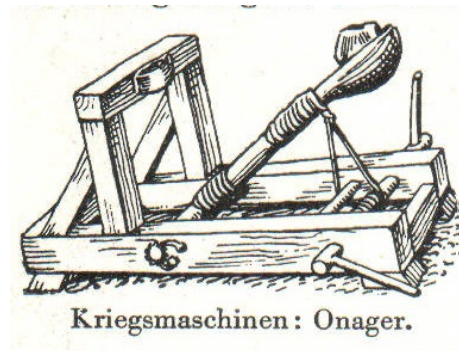
er en gyldig diskretisering av likning 16. Her betegner Δt størrelsen på tidssteg, subskriptet i i uttrykket v_i^n betegner romlig indeks (samsvarer med x_i), og superskript n betegner temporal indeks (samsvarer med t_n).

¹¹der elementene i den reduserte matrisen er lik -2

- h) Forklar hvordan varmelikningen med numerisk skjema gitt av likning 17 fremdeles resulterer i et lineært system $B\mathbf{v} = \mathbf{c}$. Hvordan skiller varmelikningens matrise B seg fra matrisen A som vi fant i deloppgave b)? Hvordan skiller $\mathbf{c}$ seg fra høyresida av likninga i deloppgave c)?
- i) Utvid løseren din til å løse varmelikningen. Du kan anta at $v(x, 0) = v_i^0 = 0$, og husk at nå kan kildeleddet f potensielt avhenge av tida t .

Gode gamle dager

Vi skal i denne oppgaven betrakte en romersk katapult, som gjerne kalles en *Onager* etter en variant av villesel fra Iran/midtøsten. Katapulten var torsjonsdrevet, altså en katapult der kastearmen var festet mellom en bunt tvinnede tau som var festet mellom noen bjelker. Se figur 3. Vi antar katapultens



Figur 3: Illustrasjon av en onager. Bilde fra det offentlige domene.

utskytningsmekanisme kan behandles som en vridd sylinder (kapittel 12.6 i Gjeviks kompendium).

- a) Regn ut arbeidet det krever å sette katapulten i skyteklar stilling, gitt at den starter med kastearmen rettet i vertikal retning, og at den kan senkes med $\Delta\theta = \pi/2$ radianer. Her kan du anta at hvis onagerens bredde er L , så vil skytemekanismen kunne betraktes som vridningen av to sylindere med radius a som er $L/2$ lange.

Hint: Arbeidet er relatert til dreiemomentet M ved

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} M(\theta) d\theta. \quad (18)$$

- b) Anta katapulten skyter en stein som veier 20 kg en avstand på 130 m, hva må utgangsfarten til katapulten ha vært? Vi antar at katapultarmen er to meter lang og at utgangsfarten er rettet horisontalt. Se bort fra luftmotstand.
- c) Anta det tok et sekund fra artilleristen trakk i den figurative avtrekkeren i katapulten, til steinen var skutt ut i farten dere fant i oppgave b). Hva var den midlere akselerasjonen? Hvor stor var skuddkraften?
- d) Anta en hundre prosent effektiv katapult, altså at 100% av den kinetiske energien i bevegelsen til katapultarmen ble overført til steinen. Beregn den effektive skjærmodulen μ for tauet i katapulten. Du kan anta at radien $a = 5$ cm.

Hva med luftmotstanden?

De resterende oppgavene er dedikert til å forstå luftmotstand noe bedre. Her kan det være lurt å benytte seg av numeriske verktøy. Luftmotstand modelleres

ofte ved

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho u^2 C_d A, \quad (19)$$

der ρ er fluidets (her luft) massetetthet, u er objektets (midlere) hastighet, C_d er en dimensjonsløs friksjonskoeffisient og A er tverrsnittsarealet til objektet. Vi antar i denne oppgaven at katapultsteinen er perfekt symmetrisk med radius R . Friksjonskoeffisienten setter vi til $C_d = 0.47$ og massetettheten til luft og stein settes til henholdsvis $\rho_l = 1.2 \text{ kg/m}^3$ og $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$. Anta for enkelthetens skyld at luftmotstanden kun virker i x -retning.

- e) Beregn steinens radius og tverrsnittsareal.
- f) Bruk utslippshastigheten du beregnet i oppgave b) til å beregne luftmotstanden på steinen. Hvis du antar en konstant luftmotstand, hvor langt kommer steinen nå? Kunne vi rimelig ignorere luftmotstanden i oppgave b)?

Hvis vi betrakter den horisontale bevegelseslikningen for katapultsteinen, legger vi merke til at likning 19 resulterer i en ikkelineær differensiallikning for posisjonen $x(t)$ til steinen. Disse likningene er svært vanskelige å løse direkte. En vanlig løsning på sånne problemer er å gjøre likningene lineære ved hjelp av såkalte iterative løsere. Dette skal vi prøve på nå. La oss heller tilnærme likning 19 med

$$F_d = -\frac{1}{2}\rho u_k u_{k-1} C_d A, \quad (20)$$

der u_k er vårt k -te gjett på løsningen av likningen, med u_{k-1} det forrige gjettet. Bevegelseslikningen i x -retning blir da:

$$m \frac{du_k}{dt}(t) = -\frac{1}{2}\rho u_k(t) u_{k-1}(t) C_d A \quad (21)$$

- g) Sett u_0 lik utslippshastigheten i oppgave b), beregn den nye posisjonskurven $x_1(t)$ og hastighetsprofilen $u_1(t)$ til katapultkula. Hva er den nye utslippshastigheten?
- h) Bruk resultatet ditt for hastighetsprofilen $u_1(t)$ til å beregne $u_2(t)$. Hva er den nye utslippshastigheten. Hvor mange iterasjoner må du gjøre før endringen i utslippshastighet mellom løsning u_k og u_{k-1} er mindre enn 1 m/s? Hvor mange før forskjellen er mindre enn 0.1 m/s? Hvis du regner for hånd kan det være lurt å heller sette $u_{k-1}(t)$ lik utslippsfarten ved forrige tidssteg for å forenkle beregningene.
- i) Hva er den reelle skjærmodulen μ i katapulten hvis du tar hensyn til luftmotstand? Er den realistisk?