MEK3230

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 31. Oktober 2019, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Regler for obligatoriske oppgaver i MEK3230:

Rett svar på 70 % av oppgavene behøves for å få godkjent innlevering. Du skal ha gjort forsøk på alle oppgavene!

Husk at skriving i LaTeXtar en del tid hvis man ikke har brukt det mye før. Gruppelærer setter stor pris på lesbarheten, men det hjelper ikke hvis du ikke rekker å gjøre ferdig obligen på grunn av at du valgte å skrive i LaTeX!

LYKKE TIL!

1 Korte oppgaver

1.1 Bølgeringer

Du slipper en liten stein ned i en dam og en bølgepakke med flere bølger brer seg utover i ringer. Det er ca 10 meter til den andre siden av dammen fra der du slapp steinen og du ser at bølgetoppene går med en hastighet på ca 1 meter i sekundet. Ca hvor lang tid tar det før de første bølgene når andre siden av dammen? Bølgelengden og bølgehøyden er liten i forhold til dypet.

1.2 Inkompressibilitet

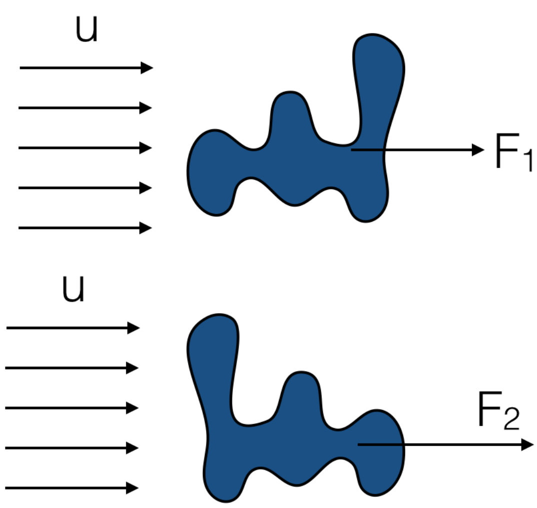
Du har en venn som har lest litt om fluidmekanikk og er overbevist om at luft er eksakt inkompressibelt ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Forklar hvorfor dette er feil, for eksempel ved å referere til tiden det tar fra du ser et lyn til du hører tordenbraket. Hva ville du høre/se først hvis din venn hadde rett? Kan du høre noe som helst? Hva med tilfellet der vi nærmer oss veldig eksakt inkomressibelt fluid, men fremdeles har ørlite kompressibilitet? Hva skjer da med lyn og torden?

1.3 Kule som synker

En kule med radius R synker med en hastighet U i en viskøs væske med viskositet μ. Strømningen kan beskrives som en krypstrømning (Stokes, $Re = 0$). Bruk skalering av ligningene til å bestemme motstandskraften/drag til kulen.

1.4 Krypstrømning

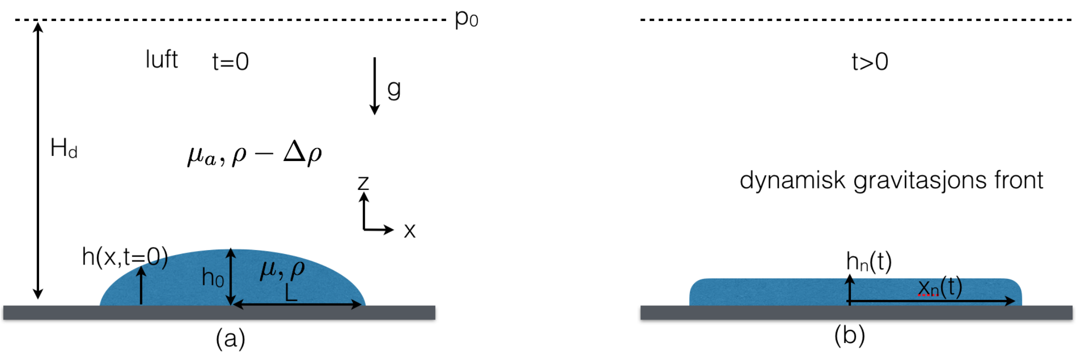
Vi har et stivt legeme i en Stokes/kryp-strømning (Fig. 1). Strømningen har en hastighet u som gir opphav til en motstandskraft F_1 på objektet og F_2 på det roterte (180 grader) objektet. Er (i) $F_1 = F_2$ eller (ii) $F_1 > F_2$ eller (iii) $F_1 < F_2$? Begrunn svaret.



Figur 1: Motstandskraft på et stivt legeme (1) og det samme objektet rotert 180 grader (2) i en Stokes strømning.

2 Lange oppgaver

2.1 Spredning av en kopp med sirup på en plate



Figur 2: a) Sirupen på platen ved $t = 0$ omringet av luft med atmosfærisk trykk (p_0) ved H_d. b) For $t > 0$ vil gravitasjonen spre sirupen utover. Utvidelsen i x og sammensynkningen i z er definert av fronten $x_N(t)$ og $h_t(t)$.

Vi tar et kopp med sirup (viskøs og inkompressibel) og setter den opp-ned på en glatt og flat plate. Når koppen løftes bort vil gravitasjonen spre sirupen utover platen. Vi skal bestemme overflatedynamikken ved hjelp av matematisk analyse og numeriske beregninger. Vi antar her at sirupen har en utvidelse langs $x \sim L$ og $z \sim h_0$ ved $t = 0$, der $h_0/L \ll 1$.

1. **Analyse:** Bestem (hydrostatisk) trykket p i sirupen i Fig. 2, der vi har trykket p_0 ved grensen $z = H_d$ og vi antar at overflatespenningen kan neglisjeres siden Bond tallet (Bo) $\gg 1$ (du skal finne utrykket for Bo i oppgave 7).
2. Siden $h_0/L \ll 1$, kan du bruke filmgeometrien til å redusere de inkompressible Navier Stokes ligningene i 2D til lubrikasjonsligningene (Hint: $u \sim U$, $w \sim h_0 U/L = \epsilon U$). Når er ligningene gyldige? Hvordan skalerer trykket?
3. Vis at overflaten er beskrevet av ligningen for $h = h(x, t)$
$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{gh^3\Delta\rho}{3\mu}\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$
ved å bruker grensebetingelser ved overflaten og på veggen (z=0). (Siden $\mu_{\text{luft}}/\mu_{\text{sirup}} \ll 1$ og skjærspenningen i filmen er mye større i filmen enn på overflaten antar vi $\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} = 0$. Husk Leibniz' integralteorem.)
4. Gjør (1) dimensjonsløs ved hjelp av skaleringen $x = X \times L$, $z = H \times h_0$, $t = T \times (3L^2\mu)/(g\Delta\rho h_0^3)$. Bestem utviklingen av sirupen i tid langs x ($X_N(t)$) og z-retning (max høyde $H_T(t)$) ved hjelp av skalering av den dimensjonsløse ligningen for $H(X, T)$ og sirupens masse/areal=q (Hint:$q = \int_0^{X_N} H(X, T)dX$). Hva er eksponentene α, β i «power laws» for $X_N(T) \sim T^\alpha, H_T(T) \sim T^\beta$?
5. **Numerisk simulering:** Test din analytiske løsning ved å gjøre en numerisk simulering av den dimensjonsøse ligningen ($\frac{\partial H}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial X}\left(H^3\frac{\partial H}{\partial X}\right) = 0$) ved å kjøre utdelt Matlab eller Python fil. Trekk ut $X_N(t)$ (eller $H_T(t)$) fra den numeriske dataen og plot løsningen sammen med skaleringsløsningen i (d). Bruk logaritmiske akser (både langs x og y i plotten – loglog). Stemmer eksponenten α (eller β) med din teoretiske beregning?
6. Vis at filmen tar en universell (self-similar) løsning for $t \gg 1$ ved å plotte alle profilene skalert med $X/X_N(T), H(X, T)/H_T(T)$ i ett og samme plot. (Noter: vi kunne faktisk løst denne profilen analytisk, noe vi ikke gjør i denne obligen.)

7. **Stabilitet/numerisk:** For $t \to \infty$ vil sirupen ha spred seg ut til en veldig tynn film på den faste platen. Vi snur platen opp-ned og fundere på om filmen blir stabilisert av overflatespenningen siden $Bo \sim 1$ eller vil dråper dryppe av filmen? Trykket i (1) endres dermed til $p* = -p - \gamma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, der γ er overflatespenningskoeffesienten. Skaler det nye leddet i ligningen med variablene gitt i (d) og finn

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}\left(H^3(\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{1}{Bo}\frac{\partial^3 H}{\partial X^3})\right) = 0. \tag{2}$$

Hva er det dimensjonsløse Bond tallet Bo? (Noter at fortegnet på gravitasjonen er endret siden retningen nå er reversert.) Linearise (2) ved å sette inn $H = H_0 + \epsilon\hat{H}(X,T)$, der H_0 er en konstant, og neglisjer alle ledd $\leq O(\epsilon^2)$.

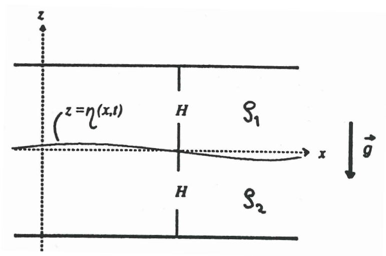
Figur 3: a) Sirupen på den faste platen ved $t = 0$ omringet av luft i atmosfærisk trykk, p_0.

8. Vi introduser en liten perturbasjon av overflaten til den flate og tynne filmen. Finn dispersjonsrelasjonen du får ved å ved å sette $\hat{H}(x,t) = \exp(i(kX - \omega T))$ inn i den lineariserte ligningen. Her er k bølgetallet og ω er vinkelfrekvensen. Når er filmen stabil (returnere til flat tilstand) og når er den instabil (starter å dryppe)? Hva er det kritiske bølgetallet, k_c, der overgangen fra stabil til instabil inntreffer?

9. Verifiser din analyse ved å gjøre numeriske simuleringer av fire forskjellige Bo tall nær stabilitetsgrensen (to simuleringer over og to simuleringer under) ved å kjøre programmet (endre på Bond tallet Bo eller bølgetallet k_i). Plot profilet til en stabil og instabil løsning for $T = 600$ i en og samme figur. (Noter: Ligningene/simuleringene vil ikke kunne beskrive dråpegenerering. Hvorfor?)

2.2 Bølgeoppgave

Vi har to lag med væsker som har konstant tetthet ρ_1 og ρ_2 og tykkelser H. Ved tiden $t = 0$ er væskene i statisk-likevekt i tyngdefeltet $(-g)$. Væskene forstyrres og settes i bevegelse $(t > 0)$. Skilleflaten for denne to-dimensjonelle strømningen kan beskrives via $\eta = a\sin(kx - \omega t)$ hvor k (bølgetallet) og ω (vinkelfrekvensen) er konstanter. Vi antar at $ka \ll 1$ og $a/H \ll 1$ slik at grenseflatebetingelsene for væskebevegelsen kan lineariseres. Strømningen er friksjonsfri $(\mu = 0)$.



Figur 4: Skisse av de to væskelagene med konstant tetthet ρ_1 og ρ_2 og en tykkelse H.

1. Hva er betingelsene for at strømningen i væskelagene kan beskrives via hastighetspotensialet $\phi(x,t)$?
2. Bestem randverdiproblemet for hastighetspotensialene i de to væskene linearisert rundt $z = 0$.
3. Løs det lineariserte randverdiproblemet. I hvert av væskelagene kan du anta en løsning på formen $\phi = A\cosh(B)\cos(C)$. A, B og C er ikke (nødvendigvis) konstanter!
4. Finn fasehastigheten c og gruppehastigheten c_g på skilleflaten når bølgelengden λ er mye mindre enn avstanden mellom de to planene.