

MEK3230

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 23. September 2021, klokken 14:15 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Regler for obligatoriske oppgaver i MEK3230:

Rett svar på 70 % av oppgavene behøves for å få godkjent innlevering. Du skal ha gjort forsøk på alle oppgavene!

Husk at skriving i $\text{\LaTeX}$ tar en del tid hvis man ikke har brukt det mye før. Gruppelærer setter stor pris på lesbarheten, men det hjelper ikke hvis du ikke rekker å gjøre ferdig obligen på grunn av at du valgte å skrive i $\text{\LaTeX}$!

LYKKE TIL!

Formler

Vektoridentiteter for sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \nabla\times\mathbf{u} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Navier-Stokes ligninger i sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned}r\text{-komp. :} \quad & \rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) = \\ & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta\text{-komp. :} \quad & \rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_ru_\theta}{r}\right) = \\ & -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z\text{-komp. :} \quad & \rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \\ & -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right].\end{aligned}$$

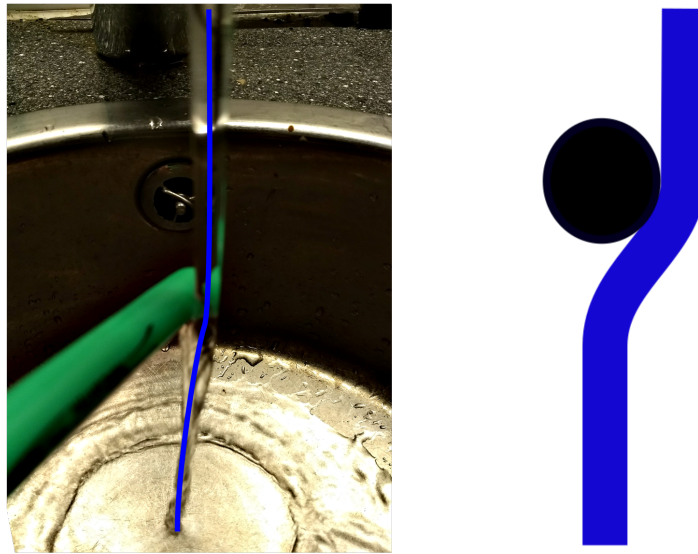
Disse står også i Acheson på side 351–353 (obs: der er ikke gravitasjonsleddet med).

1 Korte oppgaver

1.1 Vannstråle

Når du holder en penn inntil vannstrålen fra kjøkkenservanten bøyer strålen mot pennen. En venn av deg forklarer at dette skjer siden hastigheten er høyere mellom pennen og vannstrålen enn på den andre siden av vannstrålen, dermed får vi via Bernoullis teorem at trykket blir lavest på siden med pennen og strålen bøyes dermed mot pennen.

1. Forklar hvorfor forklaringen er feil ved hjelp av en matematisk og geometrisk strømlinjebeskrivelse.
2. Beskriv et eksperiment som motbeviser påstanden.



Figur 1: Penn i vannstråle

1.2 Atmosfærestrømning

Strømningen i atmosfæren beskrives gjennom Navier-Stokes ligningene, der jordens rotasjon gir opphav til en Corioliskraft ($2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$) og en sentrifugalkraft ($\rho\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$) i ligningene,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \rho\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

hvor $[\boldsymbol{\Omega}] = 1/s$ er vinkelfrekvensen og $[\mathbf{r}] = m$ er posisjonen. I tillegg har vi tettheten $[\rho] = kg/m^3$ og viskositeten $[\mu] = Pa \cdot s$. I tillegg vil det være en ligning for massebevarelse som vi ikke behøver for å løse oppgaven. Bruk Buckingham's II-teorem for å bestemme hvor mange dimensjonsløse grupper vi får og bestem disse.

1.3 Aquaporinkanaler

Aquaporinkanaler i cellemembranen muliggjør strømning av vann på tvers av membranen. Dersom kanalen har en radius R , lengde L og det viskøse fluidet har en viskositet μ som presses gjennom av et (osmotisk) trykk P i cellen, bruk skaleringsanalyse til å bestemme volumraten av strømningen gjennom kanalen. Hvor mange relevante dimensjonsløse parametre er det i problemet og hvorfor?

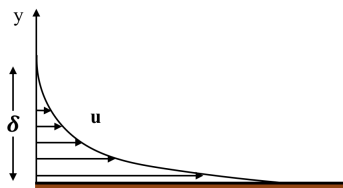
1.4 Hastighetsfelt

Betrakt hastigheten u langs x-retning for den gitte to-dimensjonale strømmingen med den partikkelderiverte gitt som $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ og virvlingens z-komponenten gitt som $\omega_z = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z$. Sirkulasjonen er definert av

$$\Gamma = \int_{\Omega} \omega \, d\mathbf{x} = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{c}$$

rundt den lukkede kurven C , her er antatt å være et kvadrat med lengde L i x-retning og høyde H i y-retning.

Evaluer strømmingen under ved å oppgi om i) $\frac{\partial u}{\partial t}$, ii) $u \frac{\partial u}{\partial x}$, iii) $v \frac{\partial u}{\partial y}$ og iv) ω_z er > 0 , < 0 eller $= 0$. Regn også ut sirkulasjonen Γ rundt det gitte kvadratet i domenet.



Figur 2: Impulsivt startet plate

En impulsivt startet plate (2), der $\mathbf{u} = 0$ ved $t = 0$. Det viskøse fluidet settes i bevegelse ved at platen får en horisontalhastighet U når $t > 0$. Anta at $H \gg \delta$ og $t > 0$ når du beregner sirkulasjonen. La to av sidene i kvadratet sammenfalle med aksene (x-aksen sammenfaller med platen).

1.5 Impulsligningen

Skriv opp impulsligningen og forklar de forskjellige leddene (hint: Gjevik side 109-116).

2 Lange oppgaver

2.1 Potensialstrømning

Vi har gitt et komplekst hastighetspotensiale som

$$w(z) = \left(\frac{m - i\Gamma}{2\pi} \right) \ln z$$

hvor $z = x + iy = re^{i\theta}$ og både m og Γ er reelle konstanter.

1. Finn ligningen for strømlinjene. Tegn strømlinjene ved hjelp av Python, Matlab, Maple, Mathematica e.l.
2. Vi vet at $w'(z) = u - iv$. Vis at $w'(z) = (u_r - iu_\theta)e^{-i\theta}$
3. Bestem posisjonen ved tiden $t > 0$ for en partikkel som hadde posisjonen $r = r_0, \theta = \theta_0$ ved tiden $t = 0$ der r og θ er polarkoordinater. (Hint: $u_r = \frac{dr}{dt}, u_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$.)

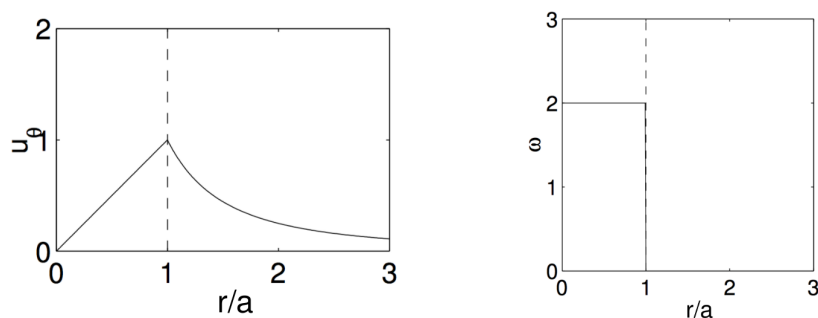
2.2 Rankine-virvel – en forenklet tornado

Vi skal se på en forenklet beskrivelse av en tornado gjennom å studere en Rankine virvel. Inne i tornadoens kjerne har vi virvling for å unngå singularitet i $r = 0$, utenfor kjernen vil vinkelhastigheten minke desto lengre vi forflytter oss utover og her har vi ingen virvling,

$$u_\theta = \Gamma r \quad \text{når } r < a$$
$$u_\theta = \frac{\Gamma a^2}{r} \quad \text{når } r > a,$$

og vi har $u_r = u_z = 0$. Hastigheten og virvlingen er illustrert i (3), der vi antar en inkompressibel friksjonsfri strømning.

Hint: trykket er alltid kontinuerlig så lenge man ikke har overflatespenning eller sjokkbølger.



Figur 3: Hastighetsprofilen for u_θ og virvlingen ω .

1. Bruk sylinderkoordinater for å finne trykket på innsiden og utsiden av Rankine-virvelen (husk gravitasjonen i z-retning).
2. Bestem trykkdifferansen mellom sentret av virvelkjernen $r = 0$ og uendelig langt bortenfor $r \rightarrow \infty$.
3. Skap en tornado i en tekopp ved å røre raskt rundt med en teskje. Bekreft observasjonen ved å beskrive matematisk formen på den frie-overflaten der trykket er lik atmosfærisk trykk p_0 (antar ingen effekt av overflatespenningen). Plot resultatet ved hjelp av et grafisk verktøy som Python, Matlab, Maple, Mathematica e.l.

2.3 Viskøs strømning

To inkompressible viskøse fluider strømmer ned en vertikal kanal (2D) med bredde H . To fluid-lag dannes i kanalen med konstant tykkelse h_1 og $h_2 = H - h_1$ der strømmingen drives av gravitasjonen. Viskositeten er den samme i de to fluidene, men de har forskjellig tetthet ρ_1 og ρ_2 . Anta at strømmingen er fullt utviklet (stasjonær) og at trykket er konstant langs kanalen (ingen trykkgradient) som gjør at bare gravitasjonen $-g\mathbf{k}$ driver strømmingen. Væske 1 strømmer på venstre side med tykkelse h_1 og væske 2 strømmer på høyre side med tykkelse h_2 . (Hint: $\mathbf{u}$ og p er kontinuerlige).

1. Beregn den totale kraften per areal som virker på kanalveggen.
2. Beregn hastighetsprofilen i kanalen i de to væskelagene.