

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3230 — Fluidmekanikk

Eksamensdag: 06 desember, 2022

Tid for eksamen: 15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Rottmanns formelsamling  
Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

Navier-Stokes' momentumligninger

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Navier-Stokes' ligninger i sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} r\text{-komp. : } \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\text{-komp. : } \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-komp. : } \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

$\nabla$ -operatoren (kartesiske koordinater):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

$\nabla$ -operatoren (sylindriske koordinater):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r - \left( \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Vektoridentiteter:

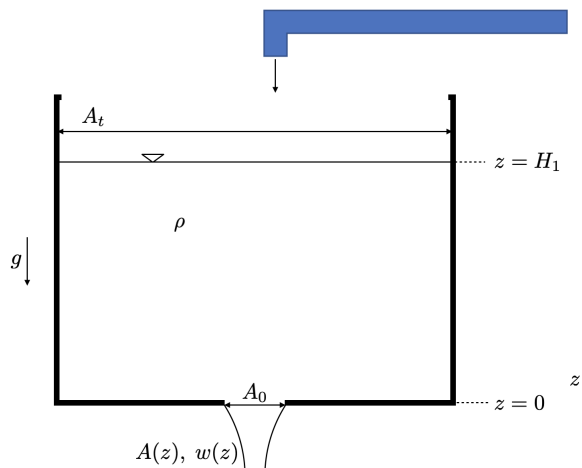
$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})\end{aligned}$$

Trigonometriske identiteter:

$$\begin{aligned}2 \sin(nx) \sin(mx) &= \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x) \\ 2 \cos(nx) \cos(mx) &= \cos((n-m)x) + \cos((n+m)x) \\ 2 \sin(nx) \cos(mx) &= \sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\end{aligned}$$

## Oppgave 1 Tank fylt med vann

En tank med areal  $A_t$  er fylt med vann opp til  $z = H$ . Tanken tømmes gjennom en sluse i bunnen, med areal  $A_0$ , som vist på figur 1. En vannstråle (jet) med areal  $A(z)$  og hastighet  $w(z)$  skyter ut fra åpningen. Vi fyller kontinuerlig på med vann ovenifra, slik at vannstanden i tanken holder seg konstant. Neglisjer vannets viskositet og overflatespenning. Tyngdens akselerasjon er  $g$ , og vannets tetthet er  $\rho$ .



Figur 1: En tank med areal  $A_t$  er fylt med vann til  $z = H$ . Tanken har en åpning med areal  $A_0$ .

### 1a Poeng: 10/100

Finn et uttrykk for  $w(z)$ , og bestem deretter  $A(z)$ .

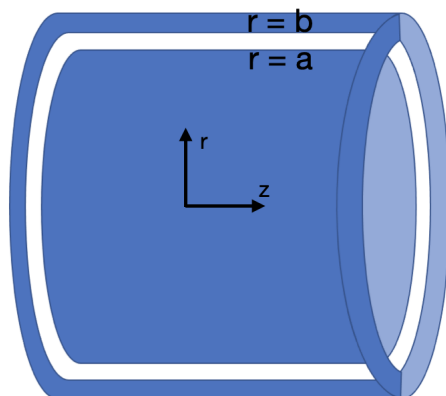
### 1b Poeng: 10/100

Vi stopper nå å fylle på med vann i tanken, og vi kan betrakte vannstanden i tanken som en funksjon av tid,  $h = h(t)$ . Hvor lang tid tar det før tanken er tom, hvis vi neglisjerer akselerasjonen i fluidet (stasjonær strømning).

(Fortsettes på side 4.)

## Oppgave 2 Fluid mellom to konsentriske sylindre

Vi har to konsentriske sylindre som vist i figur 2 (de deler samme sentrum langs  $z$ -aksen). Sylindrer med radius  $a$  ligger innvendig sylindrer med radius  $b$ , og et viskøst, inkompressibelt fluid fyller gapet mellom de to sylindrene. Vi er interessert i hva som skjer hvis vi setter en eller begge sylindrer i bevegelse. Anta at vi ikke har noe påført trykk, slik at  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ . I tillegg antar vi stasjonær strømning og at hastighetsfeltet er parallellt med  $z$ -aksen,  $\mathbf{u} = (0, 0, u_z)$ . Se bort fra gravitasjon.



Figur 2: Et viskøst fluid fyller gapet mellom to konsentriske sylindrer med radius  $a$  og  $b$ .

### 2a Poeng: 10/100

Vis at  $u_z$  bare kan variere med  $r$ ,  $u_z = u_z(r)$ . Anta så at ytterste sylindrer beveger seg med hastighet  $U_b$  i  $z$ -retning, mens innerste er i ro. Finn uttrykket for hastigheten  $u_z$  for fluidet.

### 2b Poeng: 10/100

Vi antar nå at også innerste sylindrer beveger seg, denne med hastighet  $U_a$  i  $z$ -retning. Finn nytt uttrykk for hastighetsfeltet  $u_z$ . Sammenlign med svaret fra oppgave a. Hva sier dette om formen på ligningene for  $u_z$ ?

### Oppgave 3 Ideel strømning rundt todimensjonal sylinder

En virvlingsfri og friksjonsfri todimensjonal strømning rundt en sylinder med radius  $r = a$  kan beskrives av hastighetspotensialet, her oppgitt i sylindriske koordinater,

$$\phi = U \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta). \quad (1)$$

#### 3a Poeng: 10/100

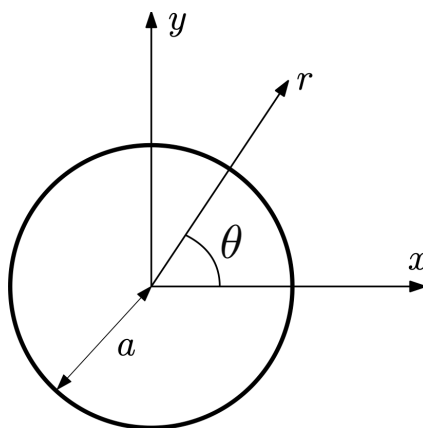
Finn hastighetene  $u_r \mathbf{e}_r$  og  $u_\theta \mathbf{e}_\theta$ . Vis at denne strømningen er uniform ved  $r = \infty$ .

#### 3b Poeng: 10/100

Hvilke grensebetingelser er riktige å bruke på sylinderveggen for denne strømningen? Vis at grensebetingelsene er oppfylt.

#### 3c Poeng: 10/100

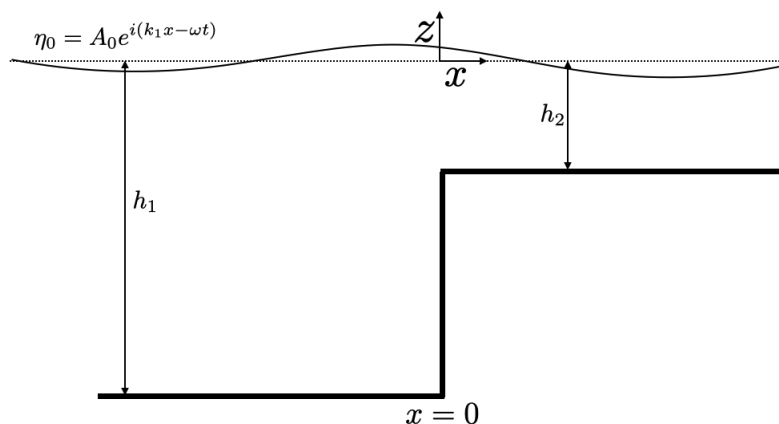
Bestem drag- og løft- kreftene per lengdeenhet som virker på sylindren. Kommenter på svaret utifra hva vi vet om ideelle fluider. (Hint:  $dF_x = pa \cos(\theta) d\theta$ ,  $dF_y = -pa \sin(\theta) d\theta$ , der  $p$  er trykket. Du kan bruke de trigonometriske identitene fra formelarket til å beregne integralene.)



Figur 3: Friksjonsfri og virvelfri strømning rundt en sylinder med radius  $r = a$  og senter i  $(x, y) = (0, 0)$ .

(Fortsettes på side 6.)

## Oppgave 4 Refleksjon og overføring av bølger på grunt vann



Figur 4: Innkommene bølgeprofil  $\eta_0$  møter en endring i bunnhøyde ved  $x = 0$ .

En monokromatisk bølge  $\eta_0 = A_0 e^{i(k_1 x - \omega t)}$  nærmer seg et bunntrekk på grunt vann fra venstre. Vanddybden endres fra  $h_1$  for  $x < 0$  til  $h_2$  for  $x > 0$ .  $k_1$  er bølgetallet ved vanddyb  $h_1$ , og  $A_0$  er bølgeamplituden til innkommende bølge.

### 4a Poeng: 10/100

Skriv opp kondisjonene som må oppfylles i  $x = 0$ . Hva slags sammensetning har bølgefeltet over dette trinnet hvis vi antar lineær bølgeteori på grunt vann?

### 4b Poeng: 10/100

Finn uttrykket for hastigheten  $u$  for  $x < 0$  og  $x > 0$  fra horisontal momentum likning for gruntvannsbølger:  $\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ .

### 4c Poeng: 10/100

Kommenter resultatene fra 4a og 4b for  $h_1 \ll h_2$  og  $h_1 \gg h_2$ .