

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3230 — Fluidmekanikk  
Eksamensdag: 6. Juni, 2016 kl. 14:30 (4 timer)  
Tid for eksamen: 14.30 – 18.30  
Oppgavesettet er på 5 sider.  
Vedlegg: Ingen  
Tillatte hjelpemidler: Rottmanns formelsamling  
Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

Vektoridentiteter for sylindriske koordinater:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Navier-Stokes ligninger i sylindriske koordinater:

$$\begin{aligned}r :: \quad & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta :: \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z :: \quad & \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ & - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right].\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

## Oppgave 1 Korte oppgaver

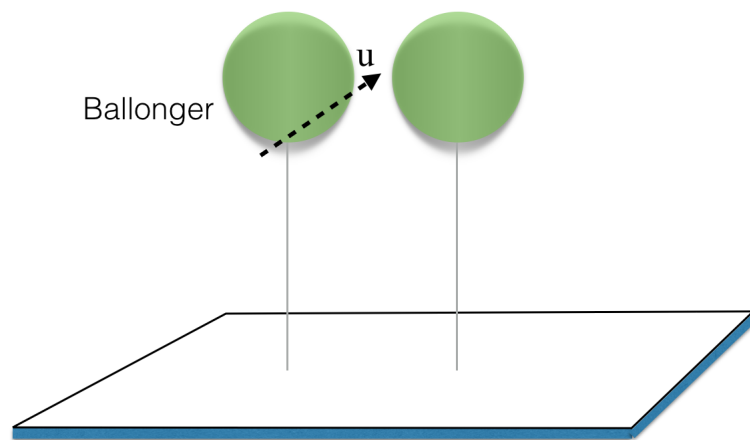
Disse oppgavene krever ikke lange utledninger ved regning og vi forventer korte svar som maksimalt fyller en halv side per deloppgave.

### a Poeng: 10/140

En bakterie (størrelse,  $L=10^{-6}\text{m}$ ) svømmer i blodet (tetthet  $\rho = 10^3\text{kg/m}^3$ , kinematisk viskositet  $\nu = \mu/\rho = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ) med en fart  $u = 10^{-6}\text{m/s}$ . Ved  $t = t_s$  kommer bakterien i kontakt med antibiotika og slutter å svømme. Hva beskriver Reynolds tallet ( $Re$ ) og hvor stort er det når bakterien svømmer? Bruk dimensjonsanalyse av den lineariserte Navier-Stokes ligningen (se bort fra trykkgradienter og eksterne krefter) til å bestemme glidetiden  $\tau$  og glidelengden  $\ell$  for bakterien ( $t > t_s$ ) etter møtet med antibiotikaen.

### b Poeng: 10/140

To ballonger fylt med helium er festet til en vegg (se Fig. 1). Du blåser midt i mellom ballongene ved deres ekvator. Anta treghetsdominert ( $Re \rightarrow \infty$ ) og inviskøs strømming. Lag en skisse der du viser retningen på fluidstrømmen og ballongene. Tiltrekkes eller frastøtes ballongene? Forklar kort svaret ditt.



Figur 1: Vi blåser luft mellom to ballonger fylt med helium ved deres ekvator. Tiltrekkes eller frastøtes ballongene?

### c Poeng: 10/140

Anta et viskøst grensesjikt  $\mathbf{u} = [u, 0, 0]$  utvikles over en flat plate med en lengde  $L$  langs  $x$ -aksen. Det er ingen trykkgradienter og strømmingen er antatt stasjonær. Bruk skalering til å estimere tykkelsen  $\delta$  på grensesjiktet ved enden av platen og hvordan  $\delta$  skalerer med Reynoldstallet.

(Fortsettes på side 3.)

**d Poeng: 10/140**

Vi ser på overflatebølger (tyngdebølger) på dypt vann ved hjelp av potensialteori, der  $\phi$  er hastighetspotensialet og strømmingen i vannet gitt av  $\nabla^2\phi = 0$ . Forklar kort hva de lineariserte grenseflatebetingelsene uttrykker (du trenger ikke utlede disse) der  $g$  er gravitasjonen og  $\eta$  overflaten til bølgen;

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad z = 0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad z = 0$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Hvilke betingelser må være oppfylt for å kunne bruke disse ligningene?

**e Poeng: 10/140**

En inkompressibel potensialstrømning er beskrevet av hastighetspotensialet,  $\phi = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma$ , der  $\alpha, \beta, \gamma$  er konstanter. Finn hastighetskomponentene og beskriv betydningen av antagelsene som er gjort.

**f Poeng: 10/140**

Hva mener vi med en dispersiv bølge? Finn gruppehastigheten  $c_g$  til en kapillærbølge med  $c = \sqrt{\gamma k / \rho}$  der  $\gamma$  er overflatespenningen,  $k$  er bølgetallet og  $\rho$  er tettheten.

(Fortsettes på side 4.)

## Oppgave 2   Burgers virvel – idealisert tornado

En idealisert tornado kan beskrives av Burgers virvlingsmodell der hastigheten i sylindriske koordinater er gitt som  $\mathbf{u} = \frac{-\alpha r}{2}\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + \alpha z\mathbf{e}_z$ . Der  $\alpha$  er en positiv konstant.

### a   Poeng: 10/140

Vis at  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

### b   Poeng: 10/140

Bestem virvlingen  $\boldsymbol{\omega} = f(u_r, r)\mathbf{e}_z = \omega\mathbf{e}_z$ .

### c   Poeng: 10/140

Vi ser at  $p = p(r, z)$  og det er ingen trykkvariasjoner i  $\theta$ -retning. Vis at bevegelsesligningskomponenten i  $\theta$ -retning reduseres til:  $-\frac{1}{2}\alpha r\omega = \nu \frac{d\omega}{dr}$ . Her er  $\nu$  den kinematiske viskositeten.

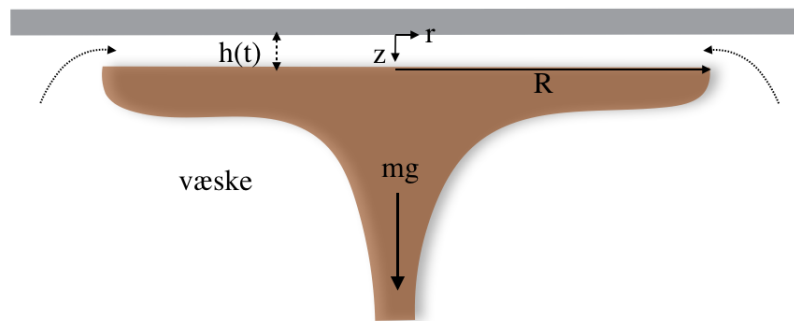
### d   Poeng: 10/140

Bestem  $u_\theta(r)$  ved å bruke grensebetingelsene  $[r \rightarrow 0, u_\theta \rightarrow 0]$  og  $[r \rightarrow \infty, u_\theta \rightarrow \frac{\Gamma}{2\pi r}]$ . Konstanten  $\Gamma$  gir virvelstyrken.

(Fortsettes på side 5.)

### Oppgave 3 Dynamikken av en sugekopp

Vi har festet en hard sugekopp med masse  $m$  på en fast vegg (omgitt av en viskøs inkompressibel væske), der den viskøse sugekraften bremses sugekoppen fra å falle ned på grunn av tyngdekraften ( $mg$ ). Fluidfilmen mellom de faste overflatene har en dynamisk høyde  $h(t)$  som er mye mindre enn sugekoppens radius  $R$  ( $h/R \ll 1$ ).



Figur 2: Vi har festet en sugekopp som er omgitt av en inkompressibel og viskøs væske til en vegg og den separeres sakte fra veggen. Filmhøyden  $h(t)$  øker med tiden, men  $h/R \ll 1$ .

**a Poeng: 10/140**

Finn lubrikasjonsligningene ved å bruke skaleringsanalyse på de oppgitte Navier-Stokes ligningene i sylinderkoordinater. Hvordan skalerer trykket i  $r$ - og  $z$ -retning?

**b Poeng: 10/140**

Vi har full heft (no-slip) ved overflatene  $u_r(0) = u_r(h) = 0$ . Bruk disse grensebetingelsene til å finne hastigheten  $u_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - zh)$ .

**c Poeng: 10/140**

Bruk massebevarelse og den kinematiske grensebetingelsen ved sugekoppen for å utlede filmligningen:  $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h^3}{12\mu r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)$ .

**d Poeng: 10/140**

Eliminer trykket via kraftbalanse for å finne den ordinære differensial ligningen som beskriver  $h(t)$ . Bruk skalering for å finne den karakteristiske tiden ("dreneringstiden") og dens relasjon til filmhøyden. (Hint: Husk trykket er endelig i filmen og det er atmosfærisk trykk ved kanten  $p(R) = p_0$ )

SLUTT