

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: amp; MEK3230 — Fluidmekanikk

Eksamensdag: amp; 13. Juni, 2017 kl. 14:30 (4 timer)

Tid for eksamen: amp; 14.30–18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: amp; Ingen

Tillatte hjelpemidler: amp; Rottmanns formelsamling
Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Navier-Stokes' momentumligning

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

∇ -operatoren

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$(\text{syndriskekoordinater}) \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

Vektoridentiteter

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

(Fortsettes på side 2.)

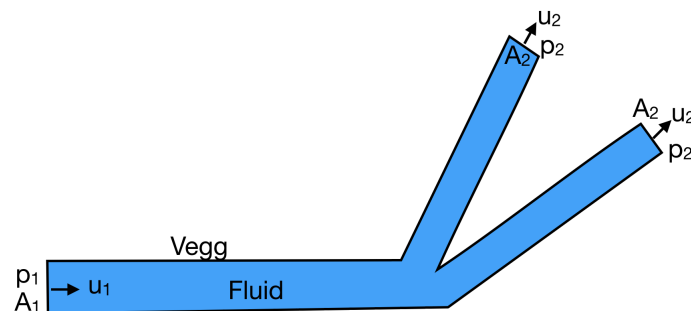
Oppgave 1 Bernoulli og tyngdebølge

Disse oppgavene krever ikke lange utledninger ved regning og vi forventer korte svar som maksimalt fyller en halv side per deloppgave.

a Bernoulli strømming, poeng: 20/100

1) Vi har bevegelsen til en stasjonær, friksjonsfri og inkompressibel væske, med utgangspunkt i Euler's ligning og finn Bernoulli's theorem. Vis hvorfor $u^2/2 + p = \text{konstant}$ langs strømlinjer, der u er hastigheten og p er trykket, der vi ikke har noen eksterne krefter.

2) Boldstrømning fra en arterie til to mindre kapillærer følger strømlingene uten trykktap ved forgreningene. Bestem massefluksen u_2 når vi kjenner p_1 , u_1 samt tverrsnittsarealet A_1 og A_2 . Bestem p_2 som funksjon av p_1 , u_1 , A_2 , A_1 .



Figur 1: Forgorening av en arterie med kjent tverrsnittsarealet A_1 og A_2 og vi kjenner p_1 , u_1 , der vi må bestemme u_2 og p_2 .

b Tyngdebølger, poeng: 20/100

1) Vi har antar en to-dimensjonell potensial strømming av en bølge ved uendelig dyp der ϕ er hastighetspotensialet (virvlingsfri, friksjonsfri og inkompressibel strømming), med overflaten $y = \eta$ beskrevet av den dynamiske grensebetingelsen $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta = 0$ og den kinematiske grensebetingelsen $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, der g er gravitasjonen, u og v er hastighetene i x- og y-retning. Bestem ligningen for hastighets potensialet ϕ og de lineariserte grensebetingelsene ved $y = 0$.

2) Løsningen til $\phi = C \exp(ky) \sin(kx - \omega t)$ der k er bølgetallet, ω er frekvensen og C er en konstant. Bestem dispersjonsrelasjonen, $\omega = f(k)$.

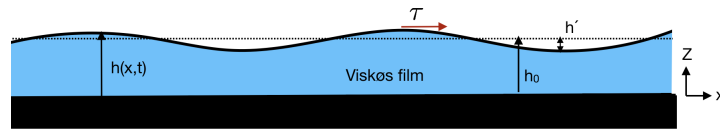
(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2 Viskøs væskefilm

Vi har skjaerstrømning over en tynn viskøs og inkompressibel væske film med viskositet μ (antar to-dimensjonell strømning). Høyden på filmen er gitt som $h(x, t)$ som er gitt som avstanden langs z-aksen i fra veggen ($z = 0$), se figur 2. Filmens lengde langs x-aksen er gitt av L og vi har at $L \gg h$ der strømningen kan beskrives av lubrikasjonsligningene

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

hvor p er trykket og u er hastigheten langs x-aksen.



Figur 2: Strømning av en viskøs film med høyde $h(x, t)$ som er utsatt for en skjærspenning $\frac{\partial u(h)}{\partial z} = \tau$.

a Poeng: 10/100

Finn uttrykket for hastigheten $u(z)$ når filmen er under konstant skjaerspenning $\frac{\partial u(h)}{\partial z} = \tau$ og vi har no-slip ved veggen $u(0) = 0$. Bestem massefluksen Q igjennom filmen.

b Poeng: 10/100

Filmene kan deformeres av vindens skjaerkraft. Bruk kontinuitetsligningen og de kinematiske grensebetingelsene til å utlede den dynamiske ligningen for væskefilmens høyde $h(x, t)$, $\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3(x, t)}{3} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{h^2 \tau}{2} \right) = 0$.

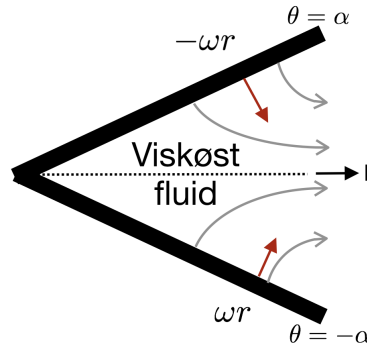
c Poeng: 10/100

Vi behøver bestemme om filmen blir ustabil og skaper en bølge-lik bevegelse som vokser med tiden, der vi antar at trykket er gitt av den lineariserte overflatespenningen $p = \gamma \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2}$. Bestem den lineariserte ligningen for $h(x, t) = h_0 + h'$ ved å anta en konstant grunnhøyde h_0 som blir utsatt for en perturbasjon $h' \ll h_0$ der vi ser bort i fra alle termer som er (ϵ^2) eller mindre. k er her bølgetallet og ω er frekvensen. Bestem dispersjonsrelasjonen for ω og bestem om filmen stabiliseres eller om den blir ustabil, der $h' = \epsilon \exp ikx - \omega t$.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 3 Krypstrømning

Vi har to vegger som er sammenknyttet via et ledd og de beveges mot hverandre med en vinkelhastighet ωr , see Figur . Væsken er inkompressibel og har en viskositet μ der Reynoldstallet $Re = 0$. Bruk sylinderkoordinater der z –aksen peker ut av arket, der vi har ingen strømning.



Figur 3: To vegger flyttes mot hverandre med en vinkelhastighet $\pm\omega r$ ved $\theta = \alpha$, som setter den viskøse væsken i bevegelse.

a Poeng: 10/100

Bestem grensebetingelsene for hastighetene u_r, u_θ ved veggen $\theta = \pm\alpha$. Vis hvorfor Stoke's strømfunksjon $\psi = \psi(r, \theta)\mathbf{e}_z$ oppfyller kontinuitetsligningen og forklar hvorfor den kan beskrives som $\psi = F(\theta)\omega r^2/2$.

b Poeng: 10/100

Utledd ligningen for strømfunksjonen ψ og finn den ordinære differensial ligningen for F gitt $\psi = -F(\theta)\omega r^2/2$, der vi har at $\nabla^4(\cdot) = (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2})(\cdot)$. Den generelle løsningen for den ordinære differensial ligningen for $F = A + B\theta + C\sin(2\theta) + D\cos(2\theta)$. Bestem strømfunksjonen $\psi(r, \theta)$.

SLUTT