

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3230 — Fluidmekanikk
Eksamensdag: 13. Juni, 2017 kl. 14:30 (4 timer)
Tid for eksamen: 14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 5 sider.
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Rottmanns formelsamling
Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Navier-Stokes' momentumligning

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Impulsligningen

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S p d\mathbf{S} - \int_V \rho \nabla \Phi dV$$

∇ -operatoren

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vektoridentiteter

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \end{aligned}$$

Stokes' sats

$$\iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 1 Korte oppgaver

Disse oppgavene krever ikke lange utledninger ved regning og vi forventer korte svar som maksimalt fyller en halv side per deloppgave.

a Biomedisin, poeng: 10/100

Du får et oppdrag innen bio-medisin, der din klient ser på bevegelsen av bakterier i en kanal med bredde $R = 10^{-6}m$ fylt med en inkompressibel væske med tetthet $\rho = 10^3 kg/m^3$, viskositet $\mu = 10^{-3}Ns/m^2$ og en gjennomsnittshastighet $U = 10^{-6}m/s$. Bakteriene krysser kanalen på tvers (normalt på retningen til U), noe din oppdragsgiver forklarer som turbulens og klienten ønsker at du skal utføre en turbulent fluidsimulering. Vis ved hjelp av dimensjonsanalyse hvorfor forklaringen ikke stemmer og gi en alternativ forklaring for at bakteriene beveger seg på tvers av kanalen.

b Trykkmåler, poeng: 10/100

Vi har plassert en trykkmåler i Oslofjorden ved en dybde $z = -L$ og lurer på om dataene vi får tilbake fra måleren er realistiske. Vi antar at det kun er ganske lave bølger på overflaten der $z \approx 0$ og at de lineariserte grensebetingelsene dermed gir en nøyaktig beskrivelse av fenomenet. Vi velger derfor å beskrive strømmingen med hastighetspotensialet

$$\phi = \frac{a\omega}{k} e^{kz} \sin(kx + \omega t).$$

Her er a amplituden, k bølgetallet, ω bølgefrequensen og akse z står normalt på overflaten. Bruk den lineariserte Bernoulli-ligningen til å bestemme perturbasjonstrykket p' . (Vi antar $p' = p + \rho g z$, der g er positiv.)

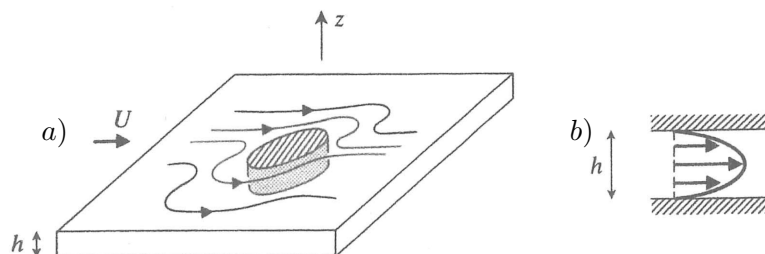
c Instabilitet, poeng: 10/100

Du studerer en fri overflate der du har funnet et hastighetspotensiale som kan beskrive strømmingen, $\phi = \hat{\phi}(x, z)e^{ik(x-ct)}$, og en dispersjonsrelasjon, $\omega = A\sqrt{B}$ hvor k er bølgetallet, ω er bølgefrequensen, c er fasehastigheten og $k > 0$, A og B er reelle tall. For hvilke verdier av B er overflaten stabil?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2 Viskøs strømming– Hele-Shaw celle

Vi har strømming i en inkompressibel væske (tetthet ρ og viskositet μ) mellom to plater i x-y planet. Avstanden langs z-aksen mellom de parallelle platene er h , se figur 1. Platene har en lengde L og vi har at $L \gg h$.



Figur 1: a) Strømming av en inkompressibel væske (tetthet ρ og viskositet μ) mellom to plater i x-y planet. b) Todimensjonal betraktning av problemet.

a Poeng: 10/100

Start med en todimensjonal betraktning av problemet slik som i figur 1b der vi ser på x-z planet der x-aksen er i samme retning som strømmingen og z-aksen går oppover fra den nederste til den øverste platen. Bestem lubrikasjonsligningene ved hjelp av skaleringsanalyse på Navier Stokes ligningene (kartesisk koordinater). Hvordan skalerer trykket? Vis at hastighetsprofilen i kanalen langs x-retning er $u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (zh - z^2)$, når vi har full heft ved platene; $u(0) = u(h) = 0$.

b Poeng: 10/100

I det tredimensjonale tilfellet (figur 1a) har vi i tillegg til u en hastighet langs y-retning som er $v = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (zh - z^2)$. Vis at strømmingen i Hele-Shaw cellen er virvlingsfri og bestem sirkulasjonen $\Gamma = \oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ om en lukket kurve S i x-y planet (konstant z). Hint: hastighetene $\mathbf{u}$ og trykket p er entydige/kontinuerlige.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 3 Friksjonsfri strømning

Et friksjonsfritt inkompressibelt fluid er også virvlingsfritt ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$). Strømningen kan da beskrives av Eulers ligninger $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \xi)$, der ξ er et konservativt-potensial, og med et divergensfritt hastighetsfelt $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Anta todimensjonal strømning i x-y planet, der $\mathbf{u}$ er definert via hastighetspotensialet $\phi = \phi(x, y)$ som $\mathbf{u} = \nabla \phi$ og strømfunksjonen $\mathbf{A} = \psi(x, y) \mathbf{e}_z$ som $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$.

a Poeng: 10/100

Vis at definisjonene av $\mathbf{u}$ via ϕ og ψ oppfyller en divergensfri strømning (masse bevarelse) og virvlingsfri strømning, og finn Cauchy-Riemann relasjonene; $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ og $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Forklar hvorfor ψ er konstant langs en strømlinje.

b Poeng: 10/100

Utleid virvelligningen fra Eulers ligning. Hva sier ligningen om utvikling av virvling for i fluidet for $t > 0$ hvis det står helt stille ($\mathbf{u} = 0$) ved $t = 0$?

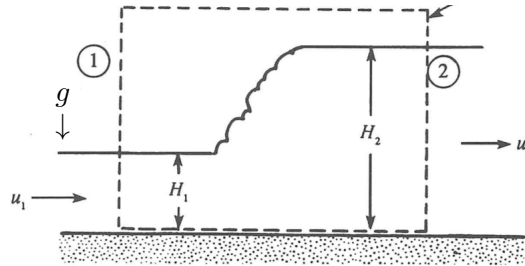
c Poeng: 10/100

Vi velger en lukket kurve av fluidpartikkler $S(t)$ som transporteres med fluidet. Fluidet har en sirkulasjon rundt $S(t)$ definert som $\Gamma = \oint_{S(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$. Vis at $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ (Kelvin's teorem), altså at sirkulasjonen er bevart i friksjonsfri strømning. Hint: hastighetene $\mathbf{u}$ og trykket p er entydige variabler, du kan bruke $\frac{D(dx)}{Dt} = du$.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4 Tynn væskefilm langs en vegg

En væskefilm strømmer horisontalt langs en vegg som i figur 2. Filmen har oppstrøms en høyde H_1 og får et stasjonært hydraulisk sprang som gjør at høyden nedstrøms utvides til H_2 . Anta at væsken er inkompressibel, det er ingen påvirkning av gassen utenfor filmen og se bort i fra effekter fra viskositeten.



Figur 2: En væskefilm strømmer langs en vegg og det dannes et stasjonært hydraulisk sprang. Oppstrøms har filmen en høyde H_1 og får et stasjonært hydraulisk sprang som gjør at høyden utvides til H_2 . Den stiplede linjen illustrerer kontrollvolumet vi betrakter.

a Poeng: 10/100

Bestem fluksen/balansen (per lengdeenhet inn i planet) på kontrollvolumet av følgende bevarte størrelser:

- Masse
- Momentum (hint: impulslikningen)

Anta at trykket i gassen er null, at gravitasjonen virker normalt inn mot veggen og at trykket i væsken er hydrostatisk.

b Poeng: 10/100

Noe av energien dissiperes i sjokket noe som betyr at $H_1 < H_2$, der Froudetallet $Fr = \frac{u}{\sqrt{gH}}$ gir forholdet mellom strømhastigheten (u) og forplantningshastigheten til bølgen ($c = \sqrt{gh}$).

- Uttrykk hastighetene u_1 , u_2 og massefluksen Q kun som funksjoner av H_1 , H_2 og g
- Vi har at $H_1 < H_2$, hvilken konsekvens har dette for Froudetallet oppstrøms og nedstrøms for spranget? Diskuter kort resultatet.

SLUTT