

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK3230 — Fluidmekanikk

Eksamensdag: 30 november, 2021

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Rottmanns formelsamling
Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Navier-Stokes' momentumligninger

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

Navier-Stokes' ligninger i sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} r\text{-komp. : } \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\text{-komp. : } \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-komp. : } \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

∇ -operatoren (kartesiske koordinater):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

∇ -operatoren (sylindriske koordinater):

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Vektoridentiteter:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \\ \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})\end{aligned}$$

Leibniz integrasjonsregel:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 1 Korte oppgaver

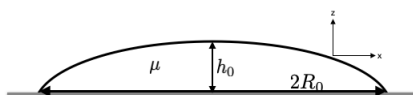
Disse oppgavene krever ikke lange utledninger ved regning og vi forventer korte svar som maksimalt fyller en halv side per deloppgave.

1a Lubrikasjonsteori: 10/100

Når lubrikasjonsteori er gyldig, kan hastighetsprofilen til en dråpe med fri overflate som sprer seg på et glatt og flatt underlag skrives som:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2/2 - zh) \quad (1)$$

Hvor μ er dynamisk viskositet og $\frac{\partial p}{\partial x}$ er horisontal trykkgradient som fordrer spredning. Hvilke antagelser må gjelde for at vi kan bruke lubrikasjonsteori? Bruk (1) og utled den dynamiske ligningen for høyden/overflaten til dråpen med utgangspunkt i kontinuitetsligningen. Du skal ikke sette inn for trykkgradienten.



Figur 1: Dråpe med initiell høyde h_0 og initiell radius R_0

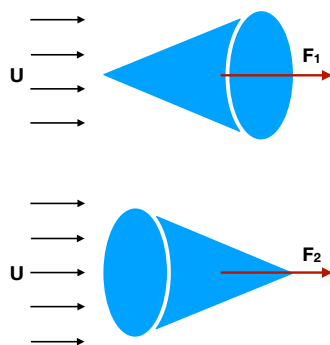
1b Skaleringsanalyse: 10/100

Anta at en ping-pong ball med radius R presses ned via en kraft $\mathbf{F}$ i en vannflate slik at ballens equator ligger ved vannflaten før kraften fjernes. Bestem ved hjelp av skaleringsanalyse frekvensen til ping-pong ballens svingninger. Anta at det er ingen dempning fra viskositeten og at vi kan se bort i fra massen til ballens skall. Vannet har en massetetthet ρ og overflatespenningen mellom luft-vann er γ .

1c Stokes strømning: 10/100

To like kjegler (figur 1) er i en inkompressibel Stokes strømning, der den ene kjeglen er rotert 180 grader. Er $\mathbf{F}_1 > \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 < \mathbf{F}_2$ eller $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$? Forklar hvorfor.

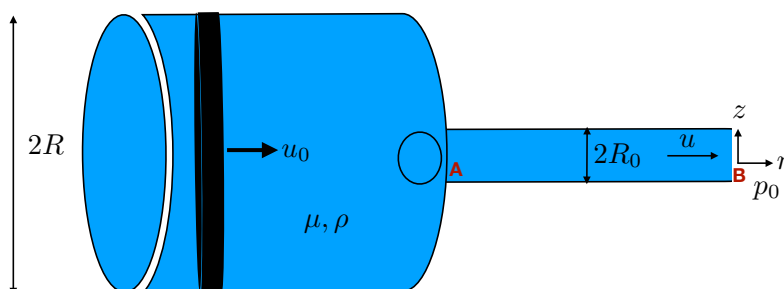
(Fortsettes på side 4.)



Figur 2: To like kjegler er eksponert for en Stokes strømning. Den ene kjeglen er rotert 180 grader.

Oppgave 2 Viskøs strømning ut i fra en sprøyte

Vi har to rør (figur 2), lignende en sprøyte, med radius R og R_0 som er fylt med en inkompressibel viskøs væske. Et stempel forflyttes med en konstant hastighet u_0 som driver en strømning gjennom de to rørene. Anta at strømningen er stasjonær og kun langs r -retning (vi ser bort i fra ende effekter ved A og B). Ved utgangen B er trykket gitt som det atmosfæriske trykket p_0 .



Figur 3: Et viskøst fluid er i en sprøyte som presses ut gjennom et stempel som forflyttes med en hastighet u_0 langs r -retning.

2a Poeng: 10/100

Bestem massefluksen ved B.

2b Poeng: 10/100

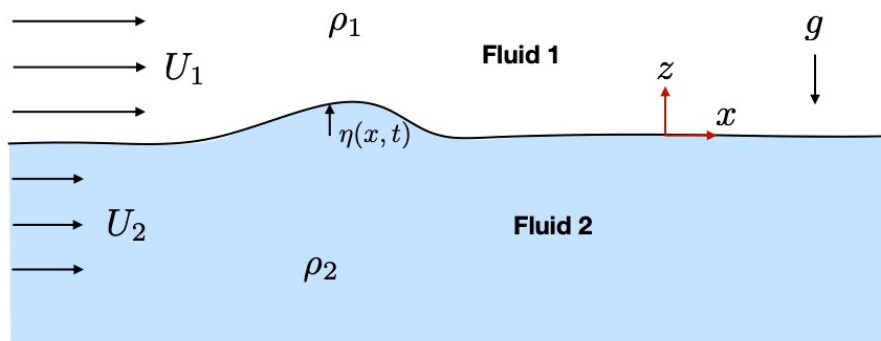
Finn hastighetsprofilen i røret mellom A-B. Bestem uttrykket for trykkdifferansen mellom A-B.

2c Poeng: 10/100

Hva er kraften som virker på røret mellom A-B?

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 3 Bølgeutvikling mellom to fluider (som ikke blandes)



Figur 4: To fluider med forskjellig massetetthet og hastighet er delt av overflaten $\eta(x, t)$.

Vi har to fluider som er delt ved en overflate (figur 3), der fluidet i det øvre laget ($z > 0$) har en hastighet U_1 langs x-retningen og en massetetthet ρ_1 . Fluidet i det nedre laget har en hastighet U_2 langs x-retningen og en massetetthet ρ_2 . Gravitasjonens akselerasjon er gitt av g . Anta at de to-dimensjonelle parallelle strømmingene er inkompressible og friksjonsfrie (ingen viskøse effekter). $\eta(x, t)$ beskriver overflaten, som har et veldig lite utslag om $z = 0$ via en forstyrrelse i strømmingen der hastighetspotensialene er gitt som $\phi_1^* = \hat{\phi}_1 + \phi_1$ når $z > 0$ og $\phi_2^* = \hat{\phi}_2 + \phi_2$, der $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$ er basispotensialene og ϕ_1, ϕ_2 er forstyrrelsen i strømmingen.

3a Poeng: 10/100

Bestem basis hastighetspotensialene $\hat{\phi}_1$ og $\hat{\phi}_2$ i lagene når det er ingen forstyrrelse og vis at disse parallelle strømmingene er virvlingsfrie. Bestem feltligningene for hele fluid strømmingene i de to lagene.

3b Poeng: 10/100

Hva er grensebetingelsene ved $z = \pm\infty$ og ved $\eta(x, t)$?

3c Poeng: 10/100

Vi antar at $\eta(x, t)$ er et veldig lite utslag om $z = 0$. Lineariser de kinematiske grensebetingelsene og den dynamiske grensebetingelsen ved $z = 0$ for å vise

(Fortsettes på side 6.)

at disse blir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, z = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, z = 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, z = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Hint: Husk at trykket må være kontinuerlig.

3d Poeng: 10/100

Bestem kriteriet (dispersjons relasjonen) for at en liten forstyrrelse i strømmingen og på overflaten vil vokse (den blir instabil). Anta at overflaten kan beskrives av $\eta(x, t) = A \exp(ik(x - ct))$ med et veldig lite utslag om $z = 0$ som oppfyller de lineariserte grensebetingelsene og at hastighetspotensialet i lag 1 er gitt som $\phi_1^* = \hat{\phi}_1 + \phi_1 = \hat{\phi}_1 + B \exp(-kz) \exp(ik(x - ct))$ og i lag 2 $\phi_2^* = \hat{\phi}_2 + \phi_2 = \hat{\phi}_2 + C \exp(kz) \exp(ik(x - ct))$. A , B og C er ukjente konstanter som må bestemmes. k er bølgetallet, c er fasehastigheten, og i er det imaginære tallet. Hvordan endres stabilitetskriteriet om $U_1 = U_2 = 0$?

(Fortsettes på side 7.)

SLUTT